

Concours Centrale-Supélec

Mathématiques 1 - MP - 2015

I Préliminaires géométriques

I.A - Isométries affines directes du plan euclidien

I.A.1) Il suffit de prendre $A = I_2$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I.A.2) Résultat immédiat en faisant un produit par blocs.

I.A.3) A est inversible. En prenant $A' = A^{-1}$ et $\vec{b}' = -A^{-1}\vec{b}$ dans la formule de la question 2), on obtient $M(A, \vec{b}).M(A', \vec{b}') = I_3$.

Tout élément $M(A, \vec{b})$ de G est donc inversible et $M(A, \vec{b})^{-1} = M(A^{-1}, -A^{-1}\vec{b})$

I.A.4) D'après **A.3)**, $G \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

D'après **A.2)**, $\text{SO}(2)$ étant stable pour le produit, G est stable pour le produit.

D'après **A.3)**, $\text{SO}(2)$ étant stable pour l'inversion, G est stable pour l'inversion.

G est donc un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$

I.A.5) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(M(I_2, \vec{b})) = \vec{b}$ donc Φ est surjective

$\forall A \in \text{SO}(2)$, $\Phi(M(A, \vec{0})) = \vec{0}$ donc Φ n'est pas injective

I.B - Droites affines du plan

I.B.1) $\Delta(0, \vec{e}_1)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est l'axe Oy .

$\Delta\left(2, \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

I.B.2) La droite $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ passe par $\begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$.

Elle a donc comme équation cartésienne : $\cos \theta X + \sin \theta Y = q$

I.B.3) La droite $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ passe par $\begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$.

Elle a donc comme équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = q \cos \theta - t \sin \theta \\ y(t) = q \sin \theta + t \cos \theta \end{cases}$, pour $t \in \mathbb{R}$

I.B.4) La droite $\Delta(q, \vec{u})$ est orthogonale à $\vec{u}$ et la droite $\Delta(r, \vec{v})$, est orthogonale à $\vec{v}$. Si elles sont confondues, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et comme ils sont unitaires, ils sont égaux ou opposés. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_\theta$.

Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ ont pour équation cartésienne $\cos \theta X + \sin \theta Y = q$ et $\cos \theta X + \sin \theta Y = r$. Si elles sont confondues alors $q = r$.

Si $\vec{u} = -\vec{v}$, alors $\vec{v} = \vec{u}_{\theta+\pi}$ et $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ ont pour équation cartésienne $\cos \theta X + \sin \theta Y = q$ et $-\cos \theta X - \sin \theta Y = r$. Si elles sont confondues alors $q = -r$.

Réciproquement, si $\vec{u} = \vec{v}$ et $q = r$ ou si $\vec{u} = -\vec{v}$ et $q = -r$ alors $\Delta(q, \vec{u}) = \Delta(r, \vec{v})$.

Finalement, $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ sont confondues si et seulement si $\vec{u} = \vec{v}$ et $q = r$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ et $q = -r$.

I.C - Action de G sur les droites

I.C.1) On remarque que $\Psi(M(R_\theta, \vec{b}))$ est la droite passant par $\langle R_\theta \vec{e}_1, \vec{b} \rangle R_\theta \vec{e}_1 = \langle \vec{u}_\theta, \vec{b} \rangle \vec{u}_\theta$ qui est la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\text{Vect}(\vec{u}_\theta)$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$, donc

$$\Psi(M(R_\theta, \vec{b})) \text{ est la droite passant par } \vec{b} \text{ et orthogonale à } \vec{u}_\theta.$$

Dans le cas $A = R_{\pi/6}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\Psi(M(A, \vec{b}))$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et orthogonale à $\vec{u}_{\pi/6}$.

I.C.2) $\Psi(M(I_2, \vec{0}))$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et orthogonale à $\vec{e}_1$. $\Psi(M(I_2, \vec{0}))$ est l'axe Oy

I.C.3) $\Psi(M(R_\theta, q\vec{u}_\theta))$ est la droite passant par $q\vec{u}_\theta$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$

$$\text{On a donc bien } \Psi(M(R_\theta, q\vec{u}_\theta)) = \Delta(q, \vec{u}_\theta)$$

Toute droite affine de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ en prenant $\vec{u}_\theta$ orthogonal à la droite et q la distance de la droite à l'origine. L'application Ψ est donc surjective.

I.C.4) a) Soit $A \in \text{SO}(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$.

$M(A, \vec{b})$ est dans H si et seulement si la droite passant par b et orthogonale à u_θ est égale à $\Delta(0, \vec{e}_1)$, c'est à dire à l'axe Oy .

Donc $M(A, \vec{b})$ est dans H si et seulement si $A = \pm I_2$ et $\vec{b} \in Oy$.

$$H \text{ est donc l'ensemble des matrices de la forme } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

b) On vérifie facilement que H est une partie non vide de G , stable pour le produit et pour l'inverse ;
 H est donc un sous groupe de G

c) Soit $g \in G$ et $h \in H$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et il existe $z \in \mathbb{R}$

$$\text{et } t \in \{-1, 1\} \text{ tels que } h = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a alors } gh = \begin{pmatrix} t \cos \theta & -t \sin \theta & -z \sin \theta + x \\ t \sin \theta & t \cos \theta & z \cos \theta + y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Psi(gh)$ est donc la droite passant par $\begin{pmatrix} -z \sin \theta + x \\ z \cos \theta + y \end{pmatrix}$ et orthogonale à $t\vec{u}_\theta$ et donc à $\vec{u}_\theta$ et $\Psi(g)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$.

Or, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -z \sin \theta + x \\ z \cos \theta + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \sin \theta \\ -z \cos \theta \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_\theta$, ces deux droites sont donc égales et

$$\text{pour tout } g \text{ de } G, \text{ et tout } h \text{ de } H, \text{ on a } \Psi(gh) = \Psi(g)$$

II Fonctions radicales

II.A - Étude d'un exemple

II.A.1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |(x^2 + y^2)f(x, y)| = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \leq 1$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)f(x, y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$ donc
 f est dans $\mathcal{B}_1$.

II.A.2) $\forall (q, \theta) \in \mathbb{R}^2, f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) = \frac{1}{1 + q^2 + t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1 + q^2 + t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
donc $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

$$\hat{f}(q, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+q^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dt}{\sqrt{1+q^2}}}{1+\frac{t^2}{1+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+q^2}}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Donc $\hat{f}(q, \theta) = \frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.$

II.A.3) $\forall q \in]0, +\infty[, R(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(q, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.$

On a donc $\frac{R'(q)}{q} = -\frac{\pi}{(1+q^2)^{3/2}}.$

◦ $q \mapsto \frac{R'(q)}{q}$ est continue sur $]0, +\infty[$

◦ $q \mapsto \frac{R'(q)}{q}$ est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1]$

◦ $\left| \frac{R'(q)}{q} \right| = \mathcal{O}_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q^2} \right)$ et $q \mapsto \frac{1}{q^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $q \mapsto \frac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $1, +\infty[$

et donc $q \mapsto \frac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $]0, +\infty[.$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'(q)}{q} dq = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} -\frac{\pi}{(1+q^2)^{3/2}} dq = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}} dq.$$

$q \mapsto \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $u \mapsto \text{sh } u$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, on peut donc procéder au changement de variable $q = \text{sh}(u)$ ($dq = \text{ch } u du$).

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}} dq = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\text{sh}^2(u))^{3/2}} \text{ch } u du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\text{ch}^2(u))^{3/2}} \text{ch } u du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}^2(u)} du = \left[\text{th}(u) \right]_0^{+\infty} = 1$$

Or $f(0, 0) = 1$, on a donc $-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'(q)}{q} dq = f(0, 0)$

II.A.4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = +\infty$$

$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ et donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas dans $\mathcal{B}_2$.

II.B - Fonctions radicales : cas général

II.B.1) $\forall (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi], f(r \cos t, r \sin t) = \varphi(r)$ donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt = \varphi(r)$ et $\bar{f}(r) = \varphi(r).$

II.B.2) Pour tout réel $q \geq 0$,

◦ $r \mapsto \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ est continue sur $]q, +\infty[$

◦ Sur $]q, q+1]$, $\left| \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} \right| = \mathcal{O}_{r \rightarrow q} \left(\frac{1}{\sqrt{r - q}} \right)$ et $r \mapsto \frac{1}{\sqrt{r - q}}$ est intégrable sur $]q, q+1]$ donc

$r \mapsto \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ est intégrable sur $]q, q+1]$.

◦ Sur $[q+1, +\infty[$, $\left| \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} \right| = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(\varphi(r))$ et $r \mapsto \varphi(r)$ est intégrable sur $[q+1, +\infty[$ donc

$r \mapsto \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ est intégrable sur $[q+1, +\infty[.$

Finalement, $r \mapsto \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ est intégrable sur $]q, +\infty[$ et $\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr$ converge.

II.B.3) Pour tout réel $q \geq 0$, $\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr$ converge et $r \mapsto \sqrt{r^2 - q^2}$ est $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]q, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. On peut donc faire le changement de variable $t = \sqrt{r^2 - q^2}$, ($dt = \frac{r}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr$, $r = \sqrt{t^2 + q^2}$),

et donc $\int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{t^2 + q^2}) dt$ converge et $\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr = \int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{t^2 + q^2}) dt$

Or, $\forall(\theta, t) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, $f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) = \varphi(\sqrt{t^2 + q^2})$

et donc $\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr = \int_0^{+\infty} f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) dt$.

De même en faisant le changement de variable $t = -\sqrt{r^2 - q^2}$, on montre que

$$\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr = \int_{-\infty}^0 f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) dt.$$

Et finalement, $\hat{f}(q, \theta) = 2 \int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr.$

II.B.4) En II.B.1), on a montré que $\bar{f}(r) = \varphi(r)$

Dans la question précédente, on a montré que $\hat{f}(q, \theta) = 2 \int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr$ et donc, que $\hat{f}(q, \theta)$ ne dépend pas de θ .

On en déduit : $\forall q \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(q, \theta) d\theta = \hat{f}(q, \theta) = 2 \int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr.$

III Transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{B}_1$

III.A -

Soit $(q, \theta) \in \mathbb{R}^2$, f appartient à $\mathcal{B}_1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $((q \cos \theta - t \sin \theta)^2 + (q \sin \theta + t \cos \theta)^2) f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) = (q^2 + t^2) f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est bornée pour $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit que :

- $t \mapsto f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Sur $[1, +\infty[$, $|f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)| = \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- De même, $t \mapsto f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.
- Sur $[-1, 1]$, $t \mapsto f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est continue, donc intégrable.

Finalement, $t \mapsto f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

III.B -

Pour tout q et tout θ ,

$$\begin{aligned} \hat{f}(-q, \theta + \pi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-q \cos(\theta + \pi) - t \sin(\theta + \pi), -q \sin(\theta + \pi) + t \cos(\theta + \pi)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q \cos \theta + t \sin \theta, q \sin \theta - t \cos \theta) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q \cos \theta - u \sin \theta, q \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (\text{changement de variable } u = -t) \\ &= \hat{f}(q, \theta) \end{aligned}$$

Donc pour tout q et tout θ on a $\hat{f}(-q, \theta + \pi) = \hat{f}(q, \theta).$

III.C -

III.C.1) On note $h(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrons que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

◦ h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a] \times [0, 2\pi]$ et

$$\forall(r, t) \in [-a, a] \times [0, 2\pi], \frac{\partial h}{\partial r}(r, t) = \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)$$

- $\forall r \in [-a, a], t \mapsto h(r, t)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$
 - $\frac{\partial h}{\partial r}$ est continue sur le compact $[-a, a] \times [0, 2\pi]$, on note $M = \sup_{[-a, a] \times [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|$.
- $t \mapsto M$ est positive, continue et intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $\forall (r, t) \in [-a, a] \times [0, 2\pi], |h(r, t)| \leq M$

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et

donc $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}, \bar{f}'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) dt.$$

III.C.2) f appartient à $\mathcal{B}_1$, donc $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)f(x, y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Notons $M = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |(x^2 + y^2)f(x, y)|$,

alors, $\forall (r, t) \in \mathbb{R}^2, |r^2 f(r \cos t, r \sin t)| \leq M$, donc

$$|r^2 \bar{f}(r)| = \left| r^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M.$$

Donc, la fonction $r \mapsto r^2 \bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

III.C.3) On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, alors, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

$$\text{soit } M = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (x^2 + y^2)^2 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (x^2 + y^2)^2 \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|,$$

$$\text{alors, } \forall (r, t) \in \mathbb{R}^2, r^4 \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right| \right) \leq M.$$

On en déduit que $\forall r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |r^4 \bar{f}'(r)| &= \left| \frac{r^4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) dt \right| \\ &\leq \frac{r^4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right| \right) dt \\ &\leq M. \end{aligned}$$

$r \mapsto r^4 \bar{f}'(r)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

IV Formule d'inversion

IV.A - Résultats préliminaires

IV.A.1) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ ($du = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$, $t = \sqrt{u^2 + 1}$), on montre que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} \text{ admet comme primitive } t \mapsto -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\right), \text{ de plus, } \lim_{t \rightarrow 1} -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\right) = 0. \text{ On en déduit que l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}.$$

IV.A.2) Soit $(\varepsilon, r) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < \varepsilon < r$. On montre facilement que l'intégrale $\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}}$ converge et

que $\theta \mapsto r \cos \theta$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\arccos \frac{\varepsilon}{r}, 0[$ dans $[\varepsilon, r[$. On fait donc le changement de variable $q = r \cos \theta$ ($dq = -r \sin \theta d\theta$) :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}} &= \int_{\arccos \frac{\varepsilon}{r}}^0 \frac{-r \sin \theta d\theta}{(r \cos \theta)^2 \sqrt{r^2 - (r \cos \theta)^2}} = \frac{1}{r^2} \int_0^{\arccos \frac{\varepsilon}{r}} \frac{d\theta}{(\cos \theta)^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\tan \theta \right]_0^{\arccos \frac{\varepsilon}{r}} = \frac{1}{r^2} \tan(\arccos \frac{\varepsilon}{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\sqrt{1 - (\frac{\varepsilon}{r})^2}}{\frac{\varepsilon}{r}} = \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r^2 \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r^2 \varepsilon}.$$

IV.B - Étude d'une fonction définie par une intégrale

IV.B.1) On note $u(t, q) = \frac{th(qt)}{\sqrt{t^2 - 1}}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrons que H est continue sur $[a, +\infty[$.

On suppose que $r \mapsto r^2 h(r)$ est bornée, soit $M = \sup_{r \in \mathbb{R}^+} |r^2 h(r)|$.

◦ u est continue sur $]1, +\infty[\times [a, +\infty[$

◦ Soit $\varphi(r) = \frac{M}{ta^2 \sqrt{t^2 - 1}}$; φ est positive, continue et d'après IV.A.1), intégrable sur $]1, +\infty[$ et $\forall (t, q) \in]1, +\infty[\times [a, +\infty[$, $|u(t, q)| \leq \varphi(t)$

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, H est donc continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et donc H est continue sur $]0, +\infty[$.

IV.B.2) En gardant les notations de la question précédente, on a : $|h(tq)| \leq \frac{M}{t^2 q^2}$ et donc

$$|H(q)| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{th(qt)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{tM}{t^2 q^2 \sqrt{t^2 - 1}} dt = \frac{1}{q^2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{q^2} \frac{\pi}{2}$$

On a donc $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty, H(q) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right)}$.

IV.B.3) On garde les notations de B.1).

On suppose que $r \mapsto r^4 h'(r)$ est bornée, soit $N = \sup_{r \in \mathbb{R}^+} |r^4 h'(r)|$.

◦ u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[\times [a, +\infty[$

◦ $\forall q \in [a, +\infty[$, $t \mapsto u(t, q)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$

◦ $\frac{\partial u}{\partial q}(t, q) = \frac{t^2 h'(tq)}{\sqrt{t^2 - 1}}$

Soit $\varphi(r) = \frac{N}{t^2 a^4 \sqrt{t^2 - 1}}$; de même qu'en B.1), on montre que φ est positive, continue et intégrable

sur $]1, +\infty[$ et $\forall (t, q) \in]1, +\infty[\times [a, +\infty[$, $\left| \frac{\partial u}{\partial q}(t, q) \right| \leq \varphi(t)$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, H est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

IV.C - Vers la formule d'inversion

IV.C.1) $F(q) = 2 \int_q^{+\infty} \frac{r \bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr$.

En faisant le changement de variable $r = tq$, pour $q > 0$, on obtient :

$$F(q) = 2q \int_1^{+\infty} \frac{t \bar{f}(tq)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

La fonction f est dans $\mathcal{B}_1$ et ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, donc d'après III.C), $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $r \mapsto r^4 \bar{f}'(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

On utilise alors IV.B.2) et IV.B.3) en remplaçant h et H par $\bar{f}$ et F , on obtient que $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$

et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q) = q \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right)$ et donc $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty \text{ on a } F(q) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q}\right)}$.

IV.C.2) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F(q)}{q^2} dq$ converge car F est continue sur $]0, +\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$F(q) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q}\right)$$

F étant de classe $\mathcal{C}^1$, on fait une intégration par parties : $\begin{cases} u = F(q) & u' = F'(q) \\ v' = \frac{1}{q^2} & v = -\frac{1}{q} \end{cases}$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F(q)}{q^2} dq = \left[-\frac{F(q)}{q} \right]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq$ et $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F(q)}{q^2}.$

$$\text{Or } F(q) = 2 \int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr \text{ et donc } \boxed{\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \left(\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr \right) dq.}$$

IV.C.3) En utilisant la question IV.C.2) et l'interversion des intégrales, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^r \frac{r\bar{f}(r)}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}} dq \right) dr.$$

$$\text{Or } \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr.$$

$$\text{et } \int_{\varepsilon}^r \frac{r\bar{f}(r)}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}} dq = r\bar{f}(r) \int_{\varepsilon}^r \frac{dq}{q^2 \sqrt{r^2 - q^2}} = r\bar{f}(r) \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r^2 \varepsilon} dr. \text{ (IV.A.2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq &= -\frac{2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr + 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} r\bar{f}(r) \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r^2 \varepsilon} dr \\ &= -2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} r\bar{f}(r) \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r^2 \varepsilon} \right) dr \\ &= 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\varepsilon \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} \left(1 - \frac{r^2 - \varepsilon^2}{r^2} \right) dr = -2\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr. \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } \boxed{\forall \varepsilon > 0, \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -2\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr.}$$

IV.D - La formule d'inversion

IV.D.1) En faisant le changement de variable $r = t\varepsilon$, on obtient $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr = \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt$

$$\text{et donc } \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -2 \int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

$$\text{Calculons } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

- Pour tout $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- $\forall t \in]1, +\infty[, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} = \frac{f(0,0)}{t \sqrt{t^2 - 1}}$ et $t \mapsto \frac{f(0,0)}{t \sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- D'après la questions III.C.1, on sait que $\bar{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc bornée sur le segment $[0, 1]$
D'après la questions III.C.2, on sait que $r \mapsto r^2 \bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc $\bar{f}$ est bornée sur $]1, +\infty[$
 $\bar{f}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$; Notons $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |\bar{f}|$. Soit $\varphi(t) = \frac{M}{t \sqrt{t^2 - 1}}$, φ est positive, continue et

$$\text{intégrable sur }]1, +\infty[, \text{ et } \forall (\varepsilon, t) \in]0, +\infty[\times]1, +\infty[, \left| \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} \right| \leq \varphi(t).$$

D'après l'extension du théorème de convergence dominée au cas d'une famille à paramètre réel, on peut conclure que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{f(0,0)}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt.$

$$\text{En IV.A.1), on a montré } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq = -\pi f(0,0)$, ce qui montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq$ existe et que $f(0,0) = \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{F'(q)}{q} dq.$

Or, $R_{0,0} = F$, on a donc montré la formule d'inversion de Radon pour f au point $(x, y) = (0, 0)$:

$$\boxed{f(0,0) = \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'_{0,0}(q)}{q} dq}$$

IV.D.2) Dans la partie II, on a étudié la fonction f définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$. On a montré la formule d'inversion de Radon pour f au point $(x, y) = (0, 0)$: $f(0, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'(q)}{q} dq$ et on a montré que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas dans $\mathcal{B}_2$.

Les hypothèses faites sur f ne sont donc pas nécessaires pour que la formule d'inversion de Radon soit vérifiée au point $((x, y) = (0, 0))$.

IV.D.3) Pour obtenir la formule d'inversion de Radon en un point (x_0, y_0) , on peut considérer la fonction $(x, y) \mapsto f(x + x_0, y + y_0)$ et lui appliquer la formule d'inversion de Radon en $(0, 0)$.

V Interprétation et application à la radiographie

V.A - Fonction invariante sur G

V.A.1) Soit g dans G et r tel que $\Phi(r) = \vec{0}$.

Il existe $A \in \text{SO}(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ tels que $g = M(A, \vec{b})$; il existe $B \in \text{SO}(2)$ tel que $r = M(B, \vec{0})$.

On a alors $gr = M(AB, \vec{b})$, et donc $\Phi(gr) = \Phi(g) = \vec{b}$ et $\boxed{f^*(gr) = f^*(g)}$.

V.A.2) Supposons que les deux droites $\Delta(q_1, \vec{u}_{\theta_1})$ et $\Delta(q_2, \vec{u}_{\theta_2})$ coïncident. D'après la question I.B.4), on a donc $q_1 = q_2$ et $\vec{u}_{\theta_1} = \vec{u}_{\theta_2}$ ou bien $q_1 = -q_2$ et $\vec{u}_{\theta_1} = -\vec{u}_{\theta_2}$ c'est à dire $q_1 = q_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2[2\pi]$ ou bien $q_1 = -q_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 + \pi[2\pi]$.

De III.B, on déduit que $\boxed{\hat{f}(q_1, \theta_1) = \hat{f}(q_2, \theta_2)}$

V.A.3) Soient $g \in G$ et $h \in H$. Dans I.C.4)c), on a montré que $\Psi(gh) = \Psi(g)$. On a donc $\boxed{\hat{f}^*(gh) = \hat{f}^*(g)}$.

V.B - Reconstruction en radiographie

V.B.1) $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$.

On peut définir $\int_{\Delta(q, \vec{u}_\theta)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(\begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q \cos \theta - t \sin \theta, q \sin \theta + t \cos \theta) dt = \hat{f}(q, \theta)$.

$$\boxed{\int_{\Delta(q, \vec{u}_\theta)} f = \hat{f}(q, \theta)}$$

V.B.2) L'intensité mesurée de part et d'autre de la zone visée nous donne la transformée de Radon $\hat{f}$ de la fonction f .

La formule d'inversion de Radon permet ensuite de calculer f en fonction de $\hat{f}$ et donc de connaître la densité des tissus dans la zone radiographiée.