EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 . Les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ ou de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés à des matrices-colonnes à n lignes. Ainsi si A est une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels ou complexes, λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur X, non nul, tel que : $AX = \lambda X$.

Dans la suite, A désignera la matrice carrée dont le terme général a_{ij} est égal au plus grand des deux entiers i et j, indices de ligne et de colonne :

$$a_{ij} = \max(i, j) .$$

Le but du problème est d'étudier les valeurs propres de cette matrice.

PARTIE I

1°) Démontrer que les valeurs propres de A sont réelles.

2°) a) Ecrire le système (I) des n équations qui expriment que le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

b) Etablir que ce système (I) est équivalent à un système (II) dans lequel la première équation E_1 relie x_1 et x_2 , l'équation F_p, $p = 2, 3, \dots, n-1$ relie x_{p-1}, x_p et x_{p+1} et l'équation G_n relie x_{n-1} et x_n .

c) Démontrer que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.

d) Déterminer la dimension de chacun des sous-espaces propres. Combien cette matrice possède-t-elle de valeurs propres distinctes ?

3°) Résolution des équations E_1 et F_p $2 \leqslant p \leqslant n-1$ lorsque λ est différent de 0 :

Démontrer qu'en posant $x_0 = x_1$, les nombres x_p, $p = 0, 1, 2, \dots, n$, définis par les équations E_1 et F_p, $p = 2, 3, \dots, n-1$ et la valeur de x_1 , sont les termes x_0, x_1, x_2, ..., x_n de la suite définie par la donnée de x_0 et de x_1 ($x_0 = x_1$) et la relation de récurrence définie par l'équation F_p, $p = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

En déduire l'expression de x_p en fonction de x_1, p et d'un nombre réel ou complexe r racine de l'équation $r^2 - 2\,a\,r + 1 = 0$ dans laquelle il a été posé :

$$2\,a = 2 + \frac{1}{\lambda} .$$

Discuter suivant les valeurs de a ($a \neq 1$) l'expression de x_p .

4°) a) Démontrer que $\lambda = -\dfrac{1}{4}$ n'est pas une valeur propre de A.

b) Démontrer que pour que λ soit valeur propre de A, il faut que le nombre réel ou complexe r soit racine de l'équation (T) $f(t) = 0$ avec :

$$f(t) = t^{2n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) t^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) t + 1 .$$

c) Démontrer que cette équation (T) n'admet que trois racines réelles -1, $1/r_n$, r_n avec $1 + \dfrac{1}{n} < r_n$.

d) Est-ce que les différentes racines de l'équation (T) correspondent à des valeurs propres λ ?

A SUIVRE

5°) Déduire des résultats précédents que la matrice A admet $n-1$ valeurs propres inférieures à $-\frac{1}{4}$; démontrer que la seule valeur propre λ_n positive est supérieure à $\frac{n^2}{2}$.

PARTIE II

Dans cette partie, r_n désigne toujours la plus grande racine réelle de l'équation (T) .

1°) Etablir la double inégalité, pour tout n ($n \geqslant 3$) :

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant 1 + \frac{2}{n} \quad .$$

On pose dans la suite $r_n = 1 + \dfrac{\theta_n}{n}$.

2°) a) Démontrer que la suite u_n, $n = 3, 4, \ldots$ définie par :

$$u_n = \frac{\theta_n - 1}{\theta_n + 1} \exp(2\,\theta_n)$$

tend vers 1 .

b) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1, 2[$ par :

$$\varphi(u) = \frac{u-1}{u+1} \exp(2\,u) \quad .$$

Etudier les variations de φ sur cet intervalle et en conclure que la suite θ_n, $n = 3, 4, \ldots$ est convergente et a pour limite l'unique réel ℓ de cet intervalle tel que : $\varphi(\ell) = 1$.

3°) Déterminer cette limite ℓ à 10^{-8} près par défaut en utilisant un algorithme que l'on détaillera et qui pourra être issu de la méthode de Newton ou d'une méthode d'itération.

4°) Démontrer que les deux infiniment grands λ_n et $\dfrac{n^2}{\ell^2}$ sont équivalents.

5°) Etablir l'inégalité : $r_n > 1 + \dfrac{\ell}{n}$.

En déduire : $\lambda_n \leqslant \dfrac{n^2}{\ell^2}\left(1 + \dfrac{\ell}{n}\right) \leqslant n^2$.

6°) Démontrer, pour toute suite finie de réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'inégalité :

$$\sum_{p=1}^{n} p(x_p)^2 + 2 \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} q\, x_p\, x_q \leqslant n^2 \sum_{p=1}^{n} (x_p)^2 \quad .$$

FIN DU PROBLEME