

**Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts II, 2025, filière PC.
Version provisoire du 27/04/2025**

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Etude des séries congruo-harmoniques alternées

Préliminaires

(1) La suite $\left(\frac{1}{pk+q}\right)_{k \geq 0}$ est décroissante de limite nulle : la série $\sum \frac{(-1)^k}{pk+q}$ est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

(2) On a

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}(n) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt. \end{aligned}$$

(3) On a d'une part

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

et d'autre part

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que

$$S_{1,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{1,1}(n) = \ln(2) + 0 = \ln(2).$$

(4) On a

$$\begin{aligned} S_{1,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q} \\ &= \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-q+1}}{j+1} \\ &= (-1)^{q+1} \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \\ &= (-1)^{q+1} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{q-2} \frac{(-1)^j}{j+1} \right) \\ &= (-1)^{q+1} (\ln(2) - \phi_{1,1}(q-2)) \\ &= (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln(2)). \end{aligned}$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

(5) Pour tout $t \geq 0$,

$$x \mapsto h(x, t) = \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$ donc

$$I_{p,q}(t) = \int_0^1 h(x, t) dx$$

est bien définie. De plus, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$t \mapsto h(x, t) = \frac{e^{(t+1)\alpha_{p,q} \ln(x)}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$$

est continue sur \mathbb{R}^+ , de même (même si c'est inutile en travaillant sur $]0, 1]$) que

$$t \mapsto h(0, t) = 0.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, 1], 0 \leq h(x, t) \leq \varphi(x) = 1.$$

La dominatrice φ étant indépendante de t et intégrable sur $[0, 1]$, le théorème de continuité des intégrales à paramètre affirme que

$$\boxed{t \mapsto I_{p,q}(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}.$$

(6) On a

$$0 \leq I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx \leq \int_0^1 x^{(n+1)\alpha_{p,q}} dx = \frac{1}{(n+1)\alpha_{p,q} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0}.$$

(7) On a de suite

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}}.$$

En intégrant l'identité précédente entre 0 et 1, il vient

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q} + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q} + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{kp/q + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q}{kp + q} = q\phi_{p,q}(n).$$

En combinant ces deux résultats, il vient

$$\boxed{\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n) \right)}.$$

(8) On en déduit de suite à l'aide de (6) que

$$S_{p,q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{p/q}}.$$

Effectuons le changement de variables $t = x^{1/q}$ ou encore $x = t^q$. Comme $dx = qt^{q-1} dt$, il vient

$$\boxed{S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{qt^{q-1}}{1 + t^p} dt = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1 + t^p} dt}.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

(9) Pour $(p, q) \in E_1$, on a

$$S_{p,q} = S_{p,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p} S_{1,1} = \frac{\ln(2)}{p}.$$

(10) Comme $(p, q) \in E_2$, il existe un entier l tel que $q = lp$. On a alors

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+lp} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+l} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=k+l-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-l+1}}{j+1} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{p} \sum_{j=l-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{p} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{l-2} \frac{(-1)^j}{j+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{l-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right). \end{aligned}$$

On a donc le résultat demandé avec $\lambda(p, q) = l = q/p$.

(11) Le polynôme $X^p + 1$ est scindé à racines simples sur \mathbb{C} et ses racines sont les racines p -ièmes de -1 . Elles sont de la forme

$$\omega_{p,k} = e^{i\pi/p} e^{i2k\pi/p} = e^{i(2k+1)\pi/p} \text{ avec } k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket.$$

Si p est pair. Alors -1 ne fait pas partie de ces racines, aucune de ces racines n'est réelle et elles viennent par paires $(\omega_{p,k}, \overline{\omega_{p,k}})$ avec $k \in \llbracket 0, p/2-1 \rrbracket$. La décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ est alors de la forme

$$F(X) = \sum_{k=0}^{p/2-1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{c_k}{X - \overline{\omega_{p,k}}}.$$

La fraction $F(X)$ étant à coefficients réels, l'unicité de la décomposition en éléments simples implique alors que $c_k = \overline{b_k}$.

Si p est impair. Alors -1 fait partie de ces racines (elle est obtenue pour $k = (p-1)/2$), les $p-1$ autres racines sont non réelles et elles viennent à nouveau par paires $(\omega_{p,k}, \overline{\omega_{p,k}})$ avec $k \in \llbracket 0, (p-1)/2-1 \rrbracket$. La décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ est alors de la forme

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{(p-1)/2-1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}}.$$

La formule demandée par l'énoncé couvre les deux cas en même temps et découle de ce qui précède en observant que

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

et que

$$\lfloor p/2 \rfloor = \begin{cases} p/2 & \text{si } p \text{ est pair} \\ (p-1)/2 & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

(12) Dans le cas où p est impair, alors

$$a_0 = [(X+1)F(X)](-1).$$

Or

$$X^p + 1 = (X+1) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} X^k$$

donc

$$a_0 = [(X+1)F(X)](-1) = \frac{(-1)^{q-1}}{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} (-1)^k} = \frac{(-1)^{q-1}}{p}.$$

De même,

$$b_k = [(X - \omega_{p,k})F(X)](\omega_{p,k}) = \omega_{p,k}^{q-1} \left[\frac{X - \omega_{p,k}}{(X^p + 1) - (X^p + 1)[\omega_{p,k}]} \right] [\omega_{p,k}].$$

On est ici dans le hors-programme ou au moins à l'extrême limite du programme !! On a

$$\lim_{x \rightarrow \omega_{p,k}} \frac{(x^p + 1) - 0}{x - \omega_{p,k}} = (X^p + 1)'(\omega_{p,k}) = p\omega_{p,k}^{p-1}.$$

Et donc

$$b_k = [(X - \omega_{p,k})F(X)](\omega_{p,k}) = \frac{\omega_{p,k}^{q-1}}{p\omega_{p,k}^{p-1}}$$

Comme $\omega_{p,k}^p = -1$, on en déduit finalement que

$$b_k = -\frac{1}{p}\omega_{p,k}^q = -\frac{1}{p}e^{iq(2k+1)\pi/p} = -\frac{1}{p}e^{iq\theta_k} \text{ avec } \theta_k = (2k+1)\pi/p.$$

(13) On en déduit que

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{e^{iq\theta_k}}{X - \omega_{p,k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X - \bar{\omega}_{p,k}} \right).$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{e^{iq\theta_k}}{X - \omega_{p,k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X - \bar{\omega}_{p,k}} &= \frac{e^{iq\theta_k}}{X - e^{i\theta_k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X - e^{-i\theta_k}} \\ &= \frac{(e^{iq\theta_k} + e^{-iq\theta_k})X - (e^{i(q-1)\theta_k} + e^{-i(q-1)\theta_k})}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1} \\ &= 2 \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}. \end{aligned}$$

Et finalement

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

(14) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} e^{iq(2k+1)\pi/p} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{iq\pi/p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(e^{2iq\pi/p} \right)^k \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{iq\pi/p} \frac{1 - (e^{2iq\pi/p})^{\lfloor p/2 \rfloor}}{1 - e^{2iq\pi/p}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (e^{2iq\pi/p})^{\lfloor p/2 \rfloor}}{e^{-iq\pi/p} - e^{iq\pi/p}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (e^{2iq\pi/p})^{\lfloor p/2 \rfloor}}{-2i \sin(q\pi/p)} \right) = \frac{1}{2 \sin(q\pi/p)} \operatorname{Re} \left(i \left(1 - (e^{2iq\pi/p})^{\lfloor p/2 \rfloor} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{2 \sin(q\pi/p)} \operatorname{Re} \left(i \left(e^{2iq\pi/p} \right)^{\lfloor p/2 \rfloor} \right). \end{aligned}$$

Si p est pair, alors

$$\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\lfloor p/2 \rfloor} = e^{iq\pi} = (-1)^q \in \mathbb{R} \text{ et donc } \boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = 0.}$$

Si p est impair, alors

$$\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\lfloor p/2 \rfloor} = e^{iq(p-1)\pi/p} = (-1)^q e^{-iq\pi/p} \text{ et } \operatorname{Re}\left(i\left(e^{2iq\pi/p}\right)^{\lfloor p/2 \rfloor}\right) = (-1)^q \operatorname{Re}\left(ie^{-iq\pi/p}\right) = (-1)^q \sin(q\pi/p).$$

Et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.}$$

(15) A l'aide de (8) et (13), on a

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \int_0^1 F(t) dt = \frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \int_0^1 F_k(t) dt \\ &= \frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \int_0^1 F_k(t) dt \\ &= \frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\cos(q\theta_k) \ln(2 \sin(\theta_k/2)) - \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) \right) \\ &= \frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{\pi}{p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \cos(q\theta_k) \ln(\sin(\theta_k/2)) \right) \\ &= \frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \\ &\quad + \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln(\sin(\theta_k/2)) \right). \end{aligned}$$

Or, si p est pair, on a d'après (14)

$$\frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = 0 - 0 = 0$$

et si p est impair

$$\frac{1 - (-1)^p (-1)^{q-1}}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{2}{p} \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) - \frac{(-1)^{q+1}}{2} \ln(2) = 0.$$

Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{S_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln(\sin(\theta_k/2)) \right)}.$$

(16) On en déduit brutalement à l'aide de (15) que

$$\boxed{S_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \sin(\pi/2) - 2 \cos(\pi/2) \ln(\sin(\pi/4)) \right) = \frac{\pi}{4},}$$

et

$$S_{3,1} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} 2 \sin(\pi/3) - 2 \cos(\pi/3) \ln(\sin(\pi/6)) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(1/2) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln(2) \right).$$

Résultats confirmés par un calcul direct

$$S_{2,1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ et } S_{3,1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \dots$$

3 Quelques calculs de probabilité

(17) On a de suite

$$A_n = ([1, n] \cap E_1), B_n = ([1, n] \cap E_2) \text{ et } C_n = ([1, n] \cap E_3)$$

puis

$$E_n = [1, n] \cap E = ([1, n] \cap E_1) \sqcup ([1, n] \cap E_2) \sqcup ([1, n] \cap E_3) = A_n \sqcup B_n \sqcup C_n.$$

(18) On a

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n (p = k, q = k).$$

Par incompatibilité et indépendance des choix de p et q , il vient

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(p = k) \mathbb{P}(q = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Les entiers p et q jouant un rôle symétrique, on a

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(p \neq q) = \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(p = q)) = \frac{n-1}{2n}.$$

(19) On a

$$B_n = \bigcup_{(k,l)} (p = k, q = lk),$$

la réunion portant sur tous les couples (k, l) d'entiers entre 1 et n tels que $1 < l \leq n/k$, c'est-à-dire $l \in \llbracket 2, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket$. On a donc à nouveau par incompatibilité et indépendance

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=2}^{\lfloor n/k \rfloor} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\lfloor n/k \rfloor - 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor n/k \rfloor - \frac{1}{n}.$$

On en déduit par incompatibilité que

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor n/k \rfloor.$$

(20) Par comparaison série/intégrales (laissée au lecteur), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln(n) \geq H_n \geq \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$$

et donc

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

(21) On a pour tout k ,

$$n/k - 1 \leq \lfloor n/k \rfloor \leq n/k.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$nH_n - n \leq \sum_{k=1}^n \lfloor n/k \rfloor \leq nH_n,$$

puis

$$\frac{H_n - 1}{n} \leq \mathbb{P}(A_n \cup B_n) \leq \frac{H_n}{n}$$

et enfin à l'aide de (20) et du théorème des gendarmes pour les équivalents,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}.$$

(22) On en déduit de suite à l'aide de (18) que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2}}.$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

(23) On a

$$\begin{aligned} I_{p,q}(n) &= \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} \frac{1}{n+1} s^{1/(n+1)-1} ds \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} ds. \end{aligned}$$

Pour $s \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n(s) = \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}}.$$

Chaque f_n est continue et pour tout $s \in]0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(s) = \frac{s^{\alpha_{p,q}-1}}{2}.$$

De plus,

$$\forall s \in]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(s) \leq s^{\alpha_{p,q}-1} = \varphi(s).$$

Comme $\alpha_{p,q}-1 > -1$, φ est intégrable en 0 donc intégrable et indépendante de n . Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1+1/(n+1)}}{1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} ds = \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1}}{2} ds = \frac{1}{2\alpha_{p,q}}.$$

Et donc

$$I_{p,q}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\alpha_{p,q}}.$$

De là,

$$\boxed{R_{p,q}(n) = \frac{1}{q} I_{p,q}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2nq\alpha_{p,q}} = \frac{1}{2np}}.$$

(24) D'après (7) et (8),

$$\phi_{p,q}(n) - S_{p,q} = \frac{(-1)^n}{q} I_{p,q}(n).$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\phi_{p,q}(n+1) - S_{p,q}}{\phi_{p,q}(n) - S_{p,q}} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2np}{2(n+1)p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1,$$

ce qui signifie que la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée est infra-linéaire pour tout couple (p, q) .