ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1991

PREMIERE EPREUVE
OPTIONS M, P', T.A.
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

MATHEMATIQUES

L'objectif du problème est d'étudier une application $\mathcal{F}_n$ dite transformation de Fourier discrète

Dans tout le problème, la lettre n désignera un entier supérieur ou égal à 2 et on adoptera les notations suivantes :

α) Soit n un entier naturel différent de 0 ; soit k un entier relatif ; $\omega_n{}^k$ désigne le nombre complexe obtenu en élevant $\omega_n = \exp(2i\pi/n)$ à la puissance k $(\omega_n{}^0 = 1)$.
On rappelle que la somme des nombres complexes $\omega_n{}^{pk}$ où p est un entier relatif donné et k un entier qui varie de 0 à n−1 vaut n ou 0 suivant que p est divisible par n ou pas.

β) Soit E_n l'espace vectoriel, de dimension n, des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n−1 .
La base canonique de E_n est la suite des polynômes e_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $e_j(x) = x^j$.

γ) Soient P et Q deux éléments de E_n :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad , \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k .$$

Désignons par $P \top Q$ le polynôme :
$$P \top Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k x^k ,$$

et par $\overline{P}$ le polynôme : $\overline{P}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a}_k x^k$.

1°) Démontrer que l'espace vectoriel E_n est une algèbre, lorsqu'il est muni de la loi de composition $\top$.

Soit $(E_n, \top)$ cette algèbre.
Préciser pour les entiers j et k, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $e_j \top e_k$.

2°) Soit u_n l'application linéaire de E_n dans lui-même définie par les relations :
$$u_n(e_o) = e_o \quad ; \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad , \quad u_n(e_k) = e_{n-k} .$$

a) Démontrer que cette application u_n est un morphisme de l'algèbre $(E_n, \top)$.

Quelle est la matrice U_n associée à u_n dans la base canonique de E_n ?
(il sera commode de numéroter les lignes et les colonnes comme les vecteurs de la base de 0 à n−1).

b) Démontrer que u_n est l'application qui fait correspondre à un polynôme P de E_n l'unique polynôme Q de E_n tel que, pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$:
$$Q\left(\omega_n{}^k\right) = P\left(\omega_n{}^{-k}\right) .$$

c) Démontrer que l'endomorphisme $u_n{}^2$ (composé de u_n avec lui-même) est l'application identité. En déduire les valeurs propres de u_n.

Préciser les sous-espaces propres en discutant suivant la parité de n : n = 2p ou n = 2p + 1 .

3°) Soit $\mathcal{F}_n$ l'application linéaire de E_n dans lui-même définie par la relation :

$$\mathcal{F}_n(P)(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\omega_n{}^k\right) x^k .$$

a) Déterminer la matrice F associée à l'application $\mathcal{F}_n$ dans la base canonique de E_n .

Préciser l'élément F_{ij} de cette matrice (il sera commode de numéroter les lignes et les colonnes comme les vecteurs de la base de 0 à n-1) .

b) Démontrer l'égalité : $\mathcal{F}_n^2 = u_n$.

En déduire que l'application $\mathcal{F}_n$ est une bijection.

c) Soient P et Q deux polynômes de E_n ; démontrer que pour tout entier $p = 0, 1, \dots, n-1$, il vient :

$$\mathcal{F}_n(P)\left(\omega_n{}^p\right) \cdot \mathcal{F}_n(Q)\left(\omega_n{}^p\right) = \sqrt{n}\, \mathcal{F}_n(P \top Q)\left(\omega_n{}^p\right) .$$

d) Déterminer les valeurs propres de l'application $\mathcal{F}_n$; pour chacune d'elles donner au moins un élément propre.

4°) Soit $(\,|\,)$ l'application, définie dans $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui au couple de polynômes (P, Q) associe le nombre complexe : $(P|Q) = \overline{P} \top Q(1)$.

a) Démontrer que cette application est un produit scalaire.

b) Calculer, pour des indices j, k entiers variant de 0 à n-1, les produits scalaires:

$$(e_j | e_k) \quad , \quad (e_j | \mathcal{F}_n e_k) \quad , \quad (\mathcal{F}_n e_j | \mathcal{F}_n e_k) .$$

c) Soient P et Q deux polynômes de E_n, démontrer que, pour tout entier k variant de 0 à n-1, il vient :

$$(e_k | \mathcal{F}_n P) = \frac{1}{\sqrt{n}} P\left(\omega_n{}^k\right) ,$$

$$(e_k | P \top Q) = (e_k | P) \cdot (e_k | Q) ,$$

et

$$(\mathcal{F}_n P | \mathcal{F}_n Q) = (P|Q) .$$

d) Retrouver le résultat de la question 3°)c) :

Pour tout couple de polynômes P et Q de E_n et tout entier k $\quad 0 \leq k \leq n-1$:

$$\sqrt{n} \cdot \mathcal{F}_n(P \top Q)\left(\omega_n{}^k\right) = \mathcal{F}_n(P)\left(\omega_n{}^k\right) \mathcal{F}_n(Q)\left(\omega_n{}^k\right) .$$

5°) Soit a_k $\quad k = 0, 1, 2, \dots$ une suite de nombres complexes ; la série de terme général $|a_k|$ est supposée convergente.

Soit f la fonction définie par la relation : $\quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

a) Démontrer que la fonction f est définie pour les nombres complexes z tels que $|z| \leq 1$.

Etablir que la fonction $\theta \mapsto f(e^{2i\pi\theta})$ est continue sur $[0, 1]$.

Soit p un entier positif donné, démontrer :

A SUIVRE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\omega_n{}^k\right) \omega_n{}^{-pk} = \int_0^1 f(e^{2i\pi\theta})\, e^{-2i\pi p\theta}\, d\theta .$$

Soit P_n le polynôme défini par la relation : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

b) Démontrer la relation : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}_n(P_n)\left(\omega_n{}^{-p}\right) = a_p$.

6°) Soient a_n et b_n les applications linéaires définies dans E_n par les relations, pour tout j , $0 \leqslant j \leqslant n-1$:

$$a_n(e_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi kj}{n}\right) e_k \quad ; \quad b_n(e_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi kj}{n}\right) e_k .$$

a) Démontrer que ces applications linéaires a_n et b_n s'expriment au moyen de l'application $\mathcal{F}_n$ définie à la question 3°) et de l'application $\mathcal{F}_n{}^*$ définie par les relations :

$$\mathcal{F}_n{}^*(e_j) = \overline{\mathcal{F}_n(e_j)} \quad , \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Calculer $\mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_n{}^*$; caractériser $\mathcal{F}_n{}^*$.

b) En déduire les expressions de $a_n{}^2$, $b_n{}^2$, $a_n \circ b_n$ en fonction de l'application identique I_n et de l'application u_n définie à la question 2°) .

c) Calculer les produits scalaires : $(a_n(e_j)|a_n(e_k))$, $(a_n(e_j)|b_n(e_k))$ et $(b_n(e_j)|b_n(e_k))$; $j, k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Préciser les résultats suivant la parité de n ; $n = 2p$, $n = 2p + 1$.

d) Déterminer les rangs $r(a_n)$ et $r(b_n)$ des applications a_n et b_n .

7°) Soit d une application linéaire de E_n dans lui-même telle que les images des vecteurs de base e_i sont obtenues en fonction de l'image $d(e_o)$ de e_o par les relations :

$$d(e_i) = \pi^i\, d(e_o) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

où π est l'application de E_n dans lui-même définie par :

$$\pi(e_{n-1}) = e_o \quad , \quad \pi(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, n-2$$

et π^i est la composée i-fois de π avec elle-même.

L'application d est dite périodique.

a) Exprimer les éléments D_{ij} de la matrice associée à d en fonction des coordonnées du vecteur $d(e_0)$: $d(e_0) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j e_j$.

Il sera utile de désigner par $\bar{p}$ la classe des entiers congrus à p modulo n .

b) Démontrer que l'application $\mathcal{F}_n^* d\, \mathcal{F}_n$ est diagonale ; c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_n^* d\, \mathcal{F}_n(e_i) = \lambda_i e_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

FIN DU PROBLEME