

1ère composition commune 1/4

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHÉMATIQUES**PREMIÈRE ÉPREUVE****OPTIONS M ET P'**

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : *MATHÉMATIQUES I*.
L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

Soit ζ la fonction définie par la relation : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Il est admis que cette fonction ζ

est définie et continue sur la demi-droite ouverte $]1, \infty[$.

L'objet de ce problème est de caractériser, sur l'intervalle $I =]-1, 1]$, la somme $F(x)$ de la série entière de terme général $\frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k$, $k \geq 2$; elle est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k .$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ . L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fonctionnelle est établie à la troisième partie.

Dans tout le texte nous usons des notations suivantes :

- pour tout entier naturel k , φ_k désigne la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$ par la relation :

$$\varphi_k(x) = \frac{[x]}{x^{k+1}} .$$

L'expression $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x ; c'est l'entier naturel vérifiant la double inégalité : $[x] \leq x < [x] + 1$.

- pour tout entier k , supérieur ou égal à 2, S_k et T_k désignent les intégrales impropres ci-dessous :

$$S_k = \int_1^{\infty} \varphi_k(x) dx \quad ; \quad T_k = \int_2^{\infty} \varphi_k(x) dx .$$

Première partie

I-1°) Convergence et calcul de l'intégrale généralisée S_k :

- a. Étudier la convergence des intégrales impropres S_k et T_k .
- b. Exprimer le réel S_k à l'aide de $\zeta(k)$ en considérant, par exemple, la série de terme général $f_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$ défini par la relation ci-dessous :

pour tous entiers n et k , $n \geq 1$, $k \geq 2$:

$$f_n(k) = \int_n^{n+1} \varphi_k(x) dx .$$

I-2°) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, $k \geq 2$, et $(-1)^k T_k$, $k \geq 2$:

- a. Démontrer que la série de terme général $(-1)^k T_k$, $k \geq 2$, est absolument convergente.
- b. Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$, $k \geq 2$, est convergente.

Soient S et T les sommes de ces séries :

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k S_k ; \quad T = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k T_k .$$

- c. Déterminer la relation qui lie S et T ; la relation $\ln 2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$ est admise.

I-3°) Expression de T à l'aide d'une intégrale :

Soit φ la fonction définie sur la demi-droite $[2, \infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2(1+x)} .$$

Démontrer que l'intégrale impropre de la fonction φ étendue à la demi-droite $[2, \infty[$ est convergente. Exprimer le réel T en fonction de l'intégrale de φ sur cette demi-droite.

I-4°) Calcul de S :

Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ la suite des réels définis par la relation :

pour tout entier n strictement positif, $h_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- a. Établir la convergence de la série de terme général h_n , $n \geq 1$. La somme H de la série est

donnée par la relation :

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} h_n .$$

- b. Dédire des résultats des questions I-2°.c et I-3° l'égalité entre les deux réels H et S .

Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ la suite de réels définis par la relation : $c_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n)$. Il est admis que cette

suite est convergente et que sa limite est la constante d'Euler γ .

1ère composition commune 3/4

- c. En exprimant, par exemple, h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, calculer H à l'aide de la constante d'Euler γ . En déduire la valeur de $F(1)$ où F est la fonction définie dans le préambule.

Deuxième partie.II-1°) Fonction $U_n, n \geq 1$:

- a. Considérons pour un entier naturel n donné, $n \geq 1$, la série entière de terme général

$$u_{n,k}(x) = \frac{1}{k} \left(\frac{-x}{n} \right)^k, \quad k \geq 2. \text{ Déterminer le rayon de convergence } R_n \text{ de cette série. Préciser}$$

la convergence de la série aux extrémités $-R_n$ et R_n de l'intervalle de convergence. Soit J_n l'ensemble des réels x pour lesquels la série de terme général $u_{n,k}(x)$, $k \geq 2$, est convergente ; soit U_n la fonction définie dans l'intervalle J_n par la relation :

$$U_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} u_{n,k}(x).$$

- b. Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.
- c. Soit x un réel donné ; vérifier qu'il existe un entier N tel que le réel x appartienne à l'intervalle J_n pour tout entier n supérieur ou égal à N . Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x)$ soit équivalent à $\frac{A}{n^\alpha}$ lorsque n croît vers l'infini .

II-2°) Étude de la fonction F :

- a. Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x > 1$, $1 < \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.
- b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k$, $k \geq 2$. Étudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence. Préciser l'ensemble de définition de la somme $F(x)$ de cette série définie dans le préambule.

II-3°) Convergence de la série de fonctions $U_n, n \geq 1$, vers la fonction F :

- a. Soit A un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Démontrer que la série des fonctions $U_n, n \geq 1$, définies à la question II-1° a. converge uniformément sur l'intervalle $[-A, 1]$.
- b. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $I =]-1, 1[$, la fonction F , définie au préambule, est la somme de la série de fonctions $U_n, n \geq 1$, et qu'elle est continue.

Pour tout entier n strictement positif soit G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte

$$]-1, \infty[\text{ par la relation : } \quad G_n(x) = \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

II-4°) Limite G de la suite $G_n, n \geq 1$:

En utilisant les résultats des questions I-4° et II-3°b, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $I =]-1, 1]$, la suite de fonctions $x \mapsto \ln(G_n(x)), n \geq 1$, est convergente et que sa limite est la fonction $x \mapsto F(x) - \gamma x$. En déduire que la limite de la suite des restrictions des fonctions G_n à l'intervalle I est une fonction G continue.

Troisième partie.

Soit x un réel différent d'un entier relatif ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$). Soit f la fonction périodique, de période 2π , définie par la relation : pour tout réel t appartenant à $[-\pi, \pi]$, $f(t) = \cos(xt)$.

III-1°) Expression de $\cotg(\pi x)$ comme somme d'une série :

a. Déterminer le développement en série de Fourier réel de la fonction f définie ci-dessus. Préciser la convergence de la série trigonométrique obtenue et sa somme.

b. Soit la série de fonctions de terme général $v_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$, $n \geq 1$; démontrer que cette série est convergente et en déduire, pour x réel différent d'un entier relatif, l'expression de

$$\text{la quantité } \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \text{ en fonction de } \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

III-2°) Relation fonctionnelle vérifiée par la fonction G :

a. Démontrer que la série de fonctions de terme général $v_n, n \geq 1$, est uniformément convergente sur tout intervalle fermé $K_a = [-a, a]$ où a est un réel compris strictement entre 0 et 1 ($0 < a < 1$). En déduire la relation :

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à l'intervalle }]0, 1[, \quad \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

b. La lettre G désignant la fonction définie à la question II-3°, démontrer que la fonction, définie sur l'intervalle $[0, 1]$, par la relation $x \mapsto G(x) G(1-x) \sin(\pi x)$, s'exprime de manière simple à l'aide de la fonction $x \mapsto x(1-x)$.

c. Déduire du résultat précédent la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right)$.