

Concours commun Mines, Ponts, Telecom, Sup.Aero, ... 1975

Option M - 1ère épreuve de mathématiques -

(Durée : 4 heures)

Cette épreuve spécifique aux candidats de l'option M comporte 3 pages.

NOTATIONS

- (a) Dans tout le problème, on donne une application continue g du segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} dans lui-même qui vérifie: $g(0) = 0$; $g(1) = 1$; $\forall x \in]0, 1[\quad g(x) \neq x$.
- (b) On désigne par E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ; on note E^+ l'ensemble des éléments f de E qui vérifient $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq 0$.
- (c) On rappelle que la notation $\inf(x, y)$, pour x, y réels, désigne le plus petit des deux nombres x et y , et que l'on a: $\inf(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|]$.

PARTIE I

Propriétés algébriques des endomorphismes u_g et v_g .

1. Soit f un élément de E . On note $u_g(f)$ et $v_g(f)$ les applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , dont la valeur en un point a quelconque de $[0, 1]$ est donnée par:

$$u_g(f)(a) = \int_0^1 \inf(x, g(a)) f(x) dx \quad ; \quad v_g(f)(a) = \int_0^1 \inf(a, g(x)) f(x) dx.$$

Démontrer, sans aucune référence à des théorèmes généraux concernant la continuité des applications du type $a \rightarrow \int_\alpha^\beta \phi(a, t) dt$, que les applications $u_g(f)$ et $v_g(f)$ sont continues.

2. Démontrer que les applications $u_g : f \rightarrow u_g(f)$ et $v_g : f \rightarrow v_g(f)$ sont des endomorphismes vectoriels de E ; démontrer que u_g est injectif; par un exemple simple, montrer qu'il n'en est pas de même en général pour v_g .
3. On suppose, dans cette question exclusivement, que l'application g est strictement croissante; montrer que l'endomorphisme v_g est injectif.
4. En supposant g dérivable, montrer que l'endomorphisme u_g n'est pas surjectif.

PARTIE II

Propriétés analytiques des endomorphismes u_g et v_g .

On suppose dans tout ce qui suit que l'application g est strictement croissante, dérivable en 0, et qu'il existe x_0 dans $]0, 1[$ tel que $g(x_0) < x_0$.

1. Montrer l'inégalité: $0 \leq g'(0) \leq 1$. On suppose désormais $g'(0) > 0$.

2. Si f appartient à E^+ , si h appartient à E , montrer:

$$\sup_{a \in [0,1]} u_g(f)(a) = \int_0^1 x f(x) dx \quad ; \quad \sup_{a \in [0,1]} |u_g(h)(a)| \leq \int_0^1 x |h(x)| dx$$

$$\sup_{a \in [0,1]} |v_g(h)(a)| \leq \int_0^1 g(x) |h(x)| dx$$

3. Si f appartient à E^+ , si a appartient à $[0, 1]$, montrer:

$$u_g(f)(a) \leq \int_0^1 \inf(x, a) f(x) dx \quad ; \quad v_g(f)(a) \leq \int_0^1 \inf(x, a) f(x) dx.$$

PARTIE III

Propriétés topologiques des endomorphismes u_g et v_g .

Si f appartient à E , on pose:

$$n_g(f) = \sup_{a \in [0,1]} u_g(|f|)(a) \quad ; \quad N_g(f) = \sup_{a \in [0,1]} v_g(|f|)(a)$$

($|f|$ désigne comme d'habitude l'application: $x \rightarrow |f(x)|$ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .)

1. Démontrer que les applications n_g et N_g ainsi définies de E dans l'ensemble des réels positifs ou nuls, sont des normes.
2. Montrer qu'il existe un élément α de $]0, 1]$ tel que:

$$\forall x \in [0, 1] \quad \alpha x \leq g(x).$$

3. En déduire, pour f dans E^+ , et a dans $[0, 1]$, les inégalités:

$$u_g(f)(a) \geq \int_0^1 \inf(x, a\alpha) f(x) dx \quad ; \quad v_g(f)(a) \geq \int_0^1 \inf(\alpha x, a) f(x) dx.$$

4. Montrer, pour f dans E :

$$\alpha \int_0^1 x |f(x)| dx \leq N_g(f) \leq \int_0^1 x |f(x)| dx.$$

Les normes n_g et N_g sont-elles équivalentes?

PARTIE IVPropriétés topologiques de E

Pour n entier ≥ 3 , on définit l'application f_n de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 \text{ si } x \text{ appartient à } \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right[\\ f_n(x) &= \frac{nx}{2} + \frac{2-n}{4} \text{ si } x \text{ appartient à } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right[\\ f_n(x) &= 1 \text{ si } x \text{ appartient à } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]. \end{aligned}$$

1. Démontrer que la suite f_n est une suite de Cauchy dans E pour les normes n_g et N_g .
2. Soit f_0 l'application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définie de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0 \text{ si } x \text{ appartient à } \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ f_0\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ f_0(x) &= 1 \text{ si } x \text{ appartient à } \left]\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

On pose $E' = E \cup \{f_0\}$, et l'on définit une application d de $(E')^2$ dans l'ensemble des réels positifs ou nuls par les égalités:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 x |f(x) - g(x)| dx \quad \text{si } f \text{ et } g \text{ appartiennent à } E \\ d(f, f_0) &= d(f_0, f) = \int_0^1 x |f_0(x) - f(x)| dx \quad \text{si } f \text{ appartient à } E \\ d(f_0, f_0) &= 0. \end{aligned}$$

Montrer que le couple (E', d) est un espace métrique, et que la suite f_n tend vers f_0 dans (E', d) lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire que la suite f_n ne converge dans aucun des espaces normés (E, n_g) , (E, N_g) .

3. On considère l'application p_0 de E dans l'ensemble des réels positifs ou nuls ainsi définie:

$$p_0(f) = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Montrer que les normes p_0 et n_g sur E ne sont pas équivalentes.

(À cet effet, on pourra considérer les éléments $\phi_{\delta, \varepsilon}$ de E définis, pour ε dans $]0, 1[$, δ dans \mathbb{R} , ainsi: $\phi_{\delta, \varepsilon}(x) = x^\delta$ si x appartient à $[\varepsilon, 1]$; $\phi_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^\delta$ si x appartient à $[0, \varepsilon[$; et estimer les réels $p_0(\phi_{\delta, \varepsilon})$; $n_g(\phi_{\delta, \varepsilon})$.)