

Banque PT 2009 — épreuve B

Partie I

Question I.1

Notons (x', y') les nouvelles coordonnées. On a $x = x' - 3$ et $y = y' - 2$ de sorte que l'équation de (C) devient

$$(y' - 2)^2 - \sqrt{3}(x' - 3)(y' - 2) - 2\sqrt{3}(x' - 3) + (4 - 3\sqrt{3})(y' - 2) + 6 - 6\sqrt{3} = 0 \iff y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0.$$

Autrement dit, O' est le centre de la conique (C) .

Question I.2

A est bien sûr la matrice de la forme quadratique associée à la conique.

I.2.a On trouve $\chi_A(X) = X^2 - X - \frac{3}{4}$ et les valeurs propres de A sont donc $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. On peut choisir comme base orthonormée directe de diagonalisation la base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $\vec{v}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire la base $(\vec{i}, \vec{j})$ qu'on a fait tourner de $-\frac{\pi}{3}$. L'isométrie qui transforme le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ est la composée de cette rotation de centre O et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Dans le nouveau repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$, en notant (X, Y) les coordonnées, l'équation de (C) se transforme en

$$\frac{1}{2}(3X^2 - Y^2) + 2 = 0 \iff \frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{4/3} = 1.$$

Le changement de coordonnées s'écrit
$$\begin{cases} x = \frac{X + Y\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \frac{-X\sqrt{3} + Y}{2} - 2 \end{cases}$$

(C) est donc une hyperbole équilatère d'axe focal $(O', \vec{v})$.

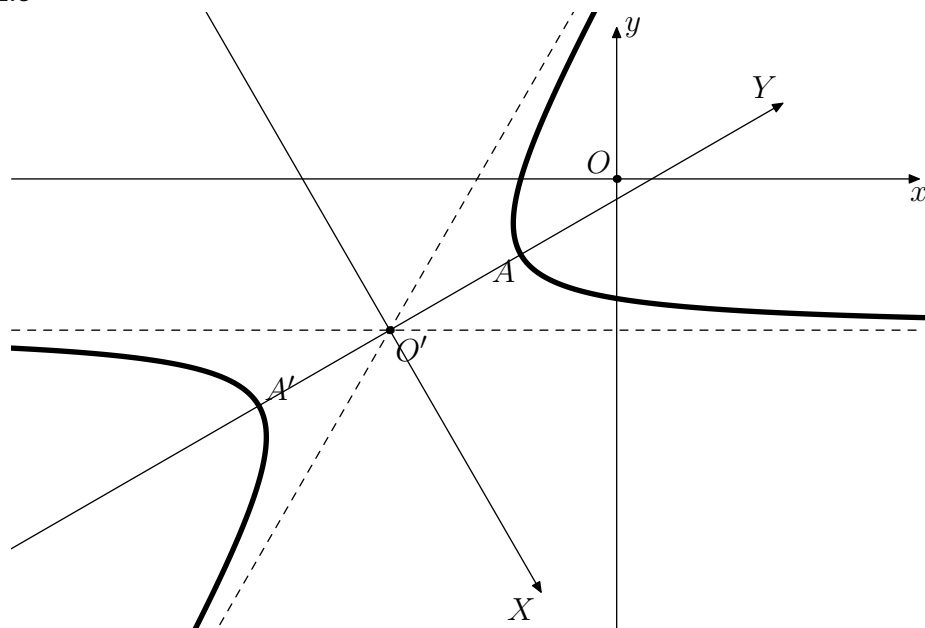
Question I.3

Les sommets A et A' ont pour coordonnées $X = 0$ et $Y = \pm 2$ ou encore, dans le repère de départ, $A(-3 + \sqrt{3}, -1)$ et $A'(-3 - \sqrt{3}, -3)$.

Question I.4

Les asymptotes ont pour équation dans le repère final $Y = \pm\sqrt{3}X$ ou encore, dans le repère initial, $y = -2$ et $y = \sqrt{3}x - 2 + 3\sqrt{3}$.

Question I.5



Partie II

Question II.1

$\rho(\theta)$ est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et tous les $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ pour k entier.

Question II.2

Les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine. En outre $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes. On restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Question II.3

Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ la fonction ρ croît de 0 à 1.

Question II.4

La courbe coupe $(x'x)$ uniquement au point O puisque $\rho(0) = \rho(\pi) = 0$. La tangente à la courbe est alors dirigée par le vecteur unitaire d'angle polaire θ : elle est bien horizontale.

Question II.5

Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u} + \rho(\theta)\vec{v}$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle.

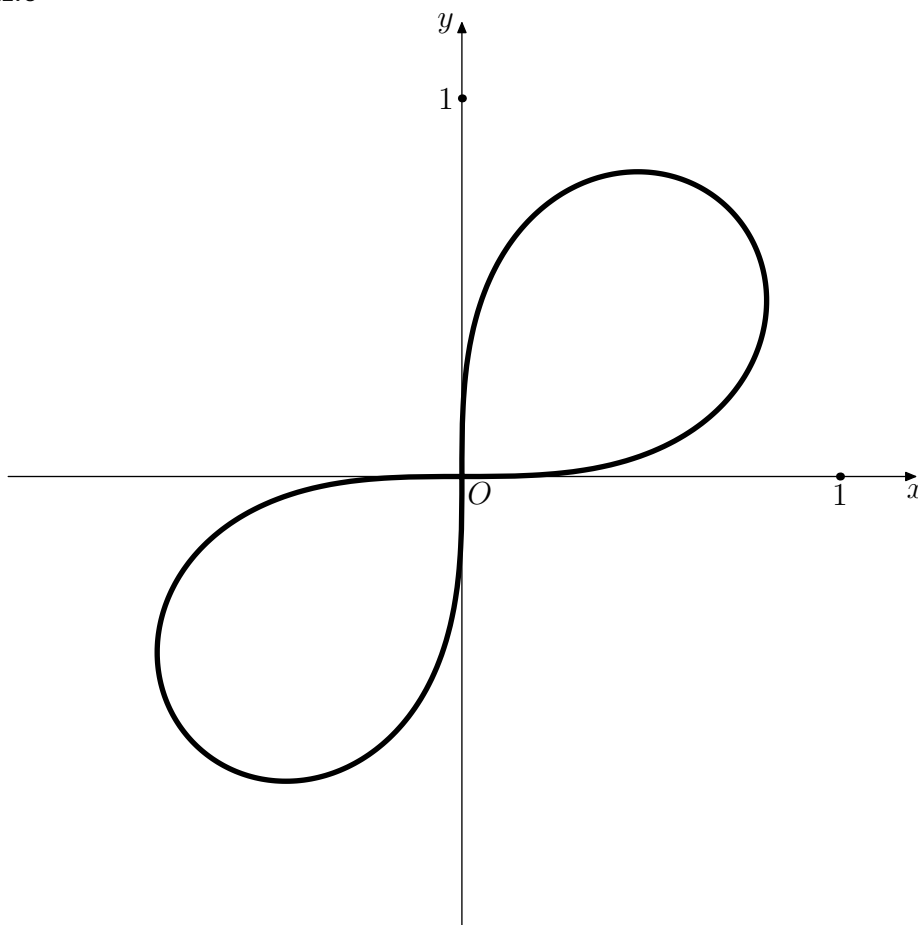
On trouve que $\vec{M}' = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\vec{u} + \sqrt{\sin 2\theta}\vec{v}$, colinéaire à $\vec{T} = \cos 2\theta\vec{u} + \sin 2\theta\vec{v}$, donc $\widehat{\vec{u}, \vec{T}} = 2\theta$ et $\widehat{\vec{v}, \vec{T}} = 3\theta$.

Ainsi $\vec{T}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ dans le repère initial.

La tangente a donc pour équation $\sin 3\theta(x - \sqrt{\sin 2\theta} \cos \theta) = \cos 3\theta(y - \sqrt{\sin 2\theta} \sin \theta)$ ou encore

$$x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = (\sin 2\theta)^{3/2}.$$

Question II.6



Partie III

Question III.1

Si $M = \Omega$, il n'y a aucun point M' répondant à la question, puisque $R > 0$.

Si $M \neq \Omega$, l'alignement impose de chercher M' sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on trouve alors une seule solution $k = \frac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$ ou encore $M' = \Omega + \frac{R^2}{\|\Omega M\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

Question III.2

Par définition de ϕ , il s'agit d'une involution : $M' = \phi(M) \iff M = \phi(M')$. Autrement dit : $\phi^{-1} = \phi$.

Question III.3

L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est égale à ce cercle lui-même, puisqu'il est défini par $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$.

Question III.4

L'image du cercle de centre Ω et de rayon $0 < r \neq R$ est le cercle de centre O et de rayon R^2/r .

Question III.5

Soit D une droite passant par Ω , il faut retirer le point Ω qui n'a pas d'image par ϕ et étudier l'image de $D' = D \setminus \{\Omega\}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigeant D .

Un point $M \in D'$ vérifie $\Omega M = k\vec{u}$, où $k \neq 0$. Son image est alors le point M' défini par $\Omega M' = \frac{R^2}{k}\vec{u}$.

Or, quand k décrit $\mathbb{R}^*$, $\frac{R^2}{k}$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Cela signifie que $\phi(D') = D'$.

Question III.6

On a déjà dit que $\lambda = \frac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$.

Alors, en complexes : $z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$ donc

$$z' = z_\Omega + \frac{R^2}{|z - z_\Omega|^2}(z - z_\Omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{(z - z_\Omega)(\overline{z - z_\Omega})}(z - z_\Omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{z - z_\Omega}.$$

Question III.7

Ici on a donc $z' = 1 + \frac{1}{\bar{z} - 1}$.

$z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta/2}}{2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ est de module $\cos \frac{\theta}{2}$ et d'argument $\frac{\theta}{2}$ si on choisit $-\pi \leq \theta \leq \pi$, ce qui est toujours possible.

$M(\theta) \neq \Omega \iff e^{i\theta} \neq 1 \iff \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Quand $z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \neq 1$ on obtient donc

$$z' = 1 + \frac{2}{e^{-i\theta} - 1} = \frac{e^{-i\theta} + 1}{e^{-i\theta} - 1} = -\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = i \cotan \frac{\theta}{2},$$

il s'agit bien sûr d'un imaginaire pur.

Quand θ décrit $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$, $M(\theta)$ décrit exactement le cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω . Le point $M'(\theta) = \phi(M(\theta))$ décrit alors, d'après ce qu'on vient de voir, l'axe des ordonnées.

Comme ϕ est involutive, l'image de l'axe des ordonnées est égale au cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω .

Question III.8

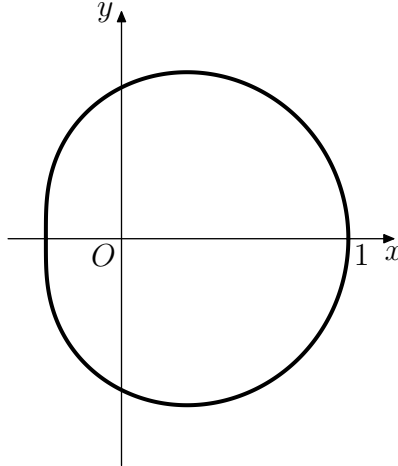
Avec les notations traditionnelles, l'équation réduite de l'ellipse s'écrit $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ donc $a = 2$ et $b = \sqrt{3}$.

Alors $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ et les foyers sont $F(1, 0)$ et $F'(-1, 0)$. L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

La représentation polaire dans un repère centré au foyer est une question de cours !

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle, le point générique de l'ellipse est $M(\theta) = F + \rho(\theta)\vec{u}$, donc $M'(\theta) = \phi(M(\theta)) = F + \frac{R^2}{\rho(\theta)}\vec{u}$. Autrement dit, l'image de l'ellipse est la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{2 + \cos \theta}{3}$.

Le tracé n'en est pas demandé, on le trouvera néanmoins ci-dessous.



Question III.9

Pour $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, le point de (H) d'angle polaire θ a pour coordonnées $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ et vérifie

$xy = \rho^2 \cos \theta \sin \theta = 1$ donc $\rho^2 = \frac{2}{\sin 2\theta}$ et $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, ce qui est une équation polaire de (H) .

Alors le même raisonnement qu'en III.8 montre que la courbe $\phi(H)$ est d'équation polaire

$$\rho = \frac{R^2}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}} = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\sqrt{2}}.$$

On reconnaît la courbe étudiée au II, privée de l'origine, et transformée par l'homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie IV

Question IV.1

Le point courant P de la droite (SM) est de coordonnées $x = x_0 + t(x_M - x_0)$, $y = ty_M$ et $z = z_0 + t(z_M - z_0)$.

Question IV.2

Notons (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère d'origine S : $X = x_M - x_0$, $Y = y_M$ et $Z = z_M - z_0$. Alors P est de coordonnées (tX, tY, tZ) .

L'intersection de la droite (SM) avec le plan $z = 0$ ou $Z = -z_0$ doit être sur l'ellipse. Or il s'agit du point P de paramètre $t = -\frac{z_0}{z_M - z_0} = -\frac{z_0}{Z}$ donc de coordonnées $(\frac{x_0 Z - X z_0}{Z}, -\frac{Y z_0}{Z}, 0)$. M est sur le cône si et seulement si P est sur l'ellipse. On obtient ainsi une équation du cône :

$$\frac{(\frac{x_0 Z - X z_0}{Z})^2}{4} + (\frac{Y z_0}{Z})^2 = 1 \text{ ou encore, en simplifiant, } \frac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0.$$

Question IV.3

En développant l'équation du cône trouvée précédemment, on vérifie que A est la matrice de la forme quadratique associée.

IV.3.a Son polynôme caractéristique est $\chi_A = (z_0^2 - X) \left(X^2 - \frac{x_0^2 + z_0^2 - 4}{4} X - \frac{z_0^2}{4} \right)$.

IV.3.b A est symétrique donc diagonalise dans une base orthonormée.

IV.3.c Le discriminant de P vaut $\Delta = 4z_0^2 + \frac{(x_0^2 + z_0^2 - 4)^2}{16} \geq 4z_0^2 > 0$ car on a supposé $z_0 \neq 0$.

IV.3.d $\chi_A(X) = (z_0^2 - X)P(X)$. Comme P n'a pas de racine double, pour que χ_A admette une racine double, il est nécessaire que ce soit z_0^2 , et donc que z_0^2 soit racine de P .

Question IV.4

Comme $P(z_0^2) = \frac{z_0^2}{4}(3 - x_0^2 + 3z_0^2)$, et qu'on a supposé $z_0 \neq 0$, le cône est de révolution si et seulement si $x_0^2 - 3z_0^2 = 3$, c'est-à-dire si et seulement si S se trouve sur l'hyperbole du plan (xOz) d'équation $\frac{x^2}{3} - z^2 = 1$.