ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1986

MATHEMATIQUES II

(4 pages dactylographiées)

M P'

On se place dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3. La partie I étudie un cas particulier d'un problème général envisagé dans la partie II, mais cette dernière (à l'exception de II.3.a. et II.6.) est indépendante de la partie I. Il sera tenu le plus grand compte des figures.

PREMIERE PARTIE

E est rapporté à un repère orthonormal direct $R_0 = (O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Les coordonnées du point générique de l'espace étant désignées par x, y, z, on considère le cercle Γ et les droites D et D' définis par les équations suivantes :

$$\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad D \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

I.1. Un point Q décrit le cercle Γ privé de O ; $\vec{u}$ désignant un vecteur unitaire de la droite OQ, on pose :

$$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \qquad , \quad \vec{u}_1 = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

La droite OQ coupe D' en un point R ; soit L le milieu de QR.

a) Donner un système de coordonnées polaires de L relativement à $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$. Tracer, sur une même figure du plan $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, Γ, D' et la courbe $\mathcal{L}$ décrite par L lorsque Q varie ; on ne cherchera pas les points d'inflexion de $\mathcal{L}$.

b) Soit Δ la médiatrice de [QR] et N son point caractéristique, c'est-à-dire le point de contact de Δ avec son enveloppe $\P$. Donner les coordonnées cartésiennes de N relativement à $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et relativement à $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{u}_1)$. Montrer que $\P$ est une parabole dont le foyer est le centre Ω du cercle Γ.

Tracer $\P$ sur la figure précédente.

c) Etablir que Ω, Q et N sont alignés et que NR et $O\Omega$ sont parallèles. Que dire du cercle de centre N passant par Q ?

I.2. Q décrivant toujours le cercle Γ privé de O, on désigne par C le cercle de diamètre [QR] situé dans le plan défini par Q et D (c'est-à-dire le plan $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{k})$) ; lorsque Q varie, C engendre une surface S_0.

Soit M le point défini par $\vec{OM} = r\,\vec{u} + z\,\vec{k}$, où r et z sont deux réels ; $(\theta,\ r, z)$ est donc un système de coordonnées cylindriques de M. Montrer que M appartient à S_0 si et seulement si la fonction

$$f(M) = F\,(\theta,\ r,\ z) = z^2 + r^2 - 2r\left(\cos\theta + \frac{2}{\cos\theta}\right) + 8$$ est nulle en ce point.

I.3. On admet que, pour tout point M de coordonnées cylindriques $(\theta,\ r,\ z)$, n'appartenant pas à D :

$$\vec{\text{grad}}\ f(M) = F'_r\ \vec{u} + \frac{1}{r}\,F'_\theta\ \vec{u}_1 + F'_z\ \vec{k}$$

a) Existe-t-il des points de S_0 où le gradient de f soit nul ?

b) Soit M tel que $\vec{OM} = r\,\vec{u} + z\,\vec{k}$; on suppose que M appartient au cercle C défini en I.2. Donner les coordonnées dans la base $(\vec{u},\ \vec{u}_1\ ,\ \vec{k})$ d'un vecteur normal en M à S_0. En déduire que la normale à S_0 en M passe par le point N défini en I.1.b.

c) Montrer que, lorsque M décrit le cercle C (cf I.2.), la normale en M à S_0 engendre un cône de révolution dont on précisera l'axe et le sommet.

I.4. Soit A le point tel que $\vec{OA} = 2\,\vec{i}$ et R_A le repère $(A\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. On désigne par X, Y, Z les coordonnées du point générique de l'espace dans ce repère.

a) Etablir que S_0 est incluse dans la surface S définie dans ce repère par l'équation

$$Z^2(X + 2) + Y^2(X - 2) + X(X^2 - 4) = 0$$

b) Quels sont les points de S qui n'appartiennent pas à S_0 ?

I.5.a) Montrer que S admet un axe de symétrie dirigé par $\vec{j} + \vec{k}$.

b) En déduire sans calculs une nouvelle famille de cercles situés sur S. Ces cercles engendrent une surface S_1 incluse dans S ; préciser les points de S qui ne sont pas dans S_1.

I.6.a) Déterminer les projections orthogonales de S sur les plans $(A\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et $(A;\ \vec{i},\ \vec{k})$ respectivement. On fera dans chaque cas une figure précise, en hachurant la portion du plan qui est projection de S.

b) Quelle est la projection orthogonale de S sur le plan $(A\ ;\ \vec{j},\ \vec{k})$?

I.7. Etablir, à l'aide de I.3. et I.5.a)., que, lorsque M décrit S privée de D et de D', la normale en M à S rencontre constamment $\P$ et une autre courbe plane $\P'$ dont on précisera la nature et les éléments remarquables ; représenter ces deux courbes sur un même croquis perspectif. Que dire de la normale à S en un point de D ou de D' ?

DEUXIEME PARTIE

On considère dans E deux courbes paramétrées $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ satisfaisant aux hypothèses $(\mathcal{H})$ suivantes : $\mathcal{N}$ est définie par une application $u \mapsto N(u)$ de classe C^2 d'un intervalle ouvert I dans E, $\mathcal{P}$ est définie par une application $v \mapsto P(v)$ de classe C^2 d'un intervalle ouvert J dans E ; de plus, pour tout couple (u, v), les trois vecteurs $\overrightarrow{N(u)P(v)}$, $\vec{N}'(u) = \dfrac{d\vec{N}}{du}$ et $\vec{P}'(v) = \dfrac{d\vec{P}}{dv}$ sont indépendants.

On pose : $\overrightarrow{N(u)P(v)} = \ell(u,\ v)\ \vec{K}(u,\ v)$ où ℓ est strictement positif et $\vec{K}$ unitaire.

II.1.a) Montrer que les fonctions ℓ et $\vec{K}$ sont de classe C^2 dans I×J.

b) Etablir les formules, valables pour tout $(u,\ v) \in I\times J$:

$$\vec{K}.\vec{N}'(u) = -\,\ell'_u \quad ; \quad \vec{K}.\vec{P}'(v) = \ell'_v \quad ; \quad \vec{K}'_u.\vec{K}'_v = \frac{\ell''_{uv}}{\ell}$$

II.2. Les deux courbes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ seront dites former un couple orthoptique si elles vérifient les hypothèses $(\mathcal{H})$ et si, pour tout $(u,\ v) \in I\times J$, le plan tangent en N(u) à $\mathcal{N}$ passant par P(v) et le plan tangent en P(v) à $\mathcal{P}$ passant par N(u) sont perpendiculaires . Etablir que cette condition est réalisée si et seulement si

$$\forall (u,\ v) \in I\times J, \quad \ell''_{uv} = 0$$

et que cela revient à dire que ℓ est de la forme

$$\ell(u,\ v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

où α est une application de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$ et β une application de classe C^2 de J dans $\mathbb{R}$.

II.3.a) On suppose ici que, relativement à un repère orthonormal, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ sont définies par les formules suivantes, où u et v décrivent $\mathbb{R}$:

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

page 88 — 1986 Concours commun Centrale-Sup.Elec. — Math 2. Option M-P'

$$N(u)\ \begin{cases} X = 1-2u^2 \\ Y = 4u \\ Z = 0 \end{cases} \qquad P(v)\ \begin{cases} X = 2v^2-1 \\ Y = 0 \\ Z = 4v \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ forment un couple orthoptique ; comparer ces courbes à ¶ et ¶' (cf I.7).

b) On définit ici, toujours dans un repère orthonormal, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ par :

$$N(u)\ \begin{cases} X = a\cos u \\ Y = b\sin u \\ Z = 0 \end{cases} \qquad P(v)\ \begin{cases} X = c\,\mathrm{ch}\,v \\ Y = 0 \\ Z = b\,\mathrm{sh}\,v \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes telles que $0 < b < a$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, et où u et v décrivent $\mathbb{R}$. Donner la nature et les éléments remarquables de ces courbes et en faire un croquis perspectif. Forment-elles un couple orthoptique ?

II.4. On suppose, **dans cette question et la suivante**, que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ forment un couple orthoptique. On a donc, pour tout couple $(u, v) \in I \times J$:

$$\ell(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

les fonctions α et β étant de classe C^2.

Etablir que, pour tout $u \in I$, la courbe $\mathcal{P}$ est incluse dans un cône de révolution (éventuellement réduit à un plan si le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{2}$) de sommet $N(u)$, d'axe la tangente en ce point à $\mathcal{N}$.

II.5. On définit un point M, fonction de u et de v, par

$$\overrightarrow{N(u)M} = (\alpha(u) + \lambda)\,\overrightarrow{K(u, v)}$$

où λ est une constante donnée ; lorsque (u, v) décrit $I \times J$, M décrit une surface S_λ.

a) Calculer $\vec{M}'_u$ et $\vec{M}'_v$ en fonction de $\alpha(u)$, $\beta(v)$, λ, $\vec{K}'_u$, $\vec{K}'_v$.

b) Montrer que, si M est distinct de N et de P, la droite NP est la normale en M à S_λ.

c) On donne $(u_0, v_0) \in I \times J$. Montrer que les courbes $u = u_0$ et $v = v_0$ de S_λ (c'est-à-dire les courbes données par $v \mapsto M(u_0, v)$ et par $u \mapsto M(u, v_0)$ respectivement) sont des cercles ou portions de cercles, se coupant à angle droit en $M(u_0, v_0)$; préciser les axes de ces cercles.

II.6. La surface S (privée de D et D') qui fait l'objet de la première partie entre-t-elle dans le cadre étudié dans la question précédente ?

II.7. Caractériser les couples orthoptiques $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ tels que la courbe $\mathcal{P}$ soit incluse dans une droite. Que peut-on dire alors des surfaces S_λ définies à partir de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ ainsi qu'il a été dit en II.5 ?

II.8. On suppose, **dans cette question et la suivante**, que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ **forment** un couple orthoptique et que ni $\mathcal{N}$ ni $\mathcal{P}$ n'est incluse dans une droite.

a) Etablir que, pour tout $(u, v) \in I \times J$:

$$\vec{N}'(u) \cdot \vec{P}'(v) = -\alpha'(u)\,\beta'(v)$$

b) Montrer qu'il existe v_1 et v_2 tels que $\vec{P}'(v_1)$ et $\vec{P}'(v_2)$ soient indépendants. En déduire l'existence d'un vecteur non nul, $\vec{H}$, indépendant de u et v, tel que, pour tout $u \in I$,

$$\vec{N}'(u) \cdot \vec{H} = 0$$

c) En déduire que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ sont deux courbes planes, situées dans deux plans perpendiculaires.

II.9. Il existe alors un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ sont définies par :

$$N(u)\ \begin{cases} x = x_1(u) \\ y = y_1(u) \\ z = 0 \end{cases} \qquad P(v)\ \begin{cases} x = x_2(v) \\ y = 0 \\ z = z_2(v) \end{cases}$$

x_1 et y_1 étant de classe C^2 dans I, x_2 et z_2 étant de classe C^2 dans J.

a) A l'aide de II.8.a, prouver qu'il existe une constante $\mu \neq 0$ telle que :

$\alpha'(u) = \mu\, x_1'(u)$ pour tout $u \in I$

$\beta'(v) = -\frac{1}{\mu}\, x_2'(v)$ pour tout $v \in J$.

b) Montrer que l'on peut se limiter au cas où $0 < \mu \leqslant 1$.

On suppose désormais cette hypothèse réalisée.

c) Etablir que, si deux fonctions numériques φ et ψ définies respectivement dans I et J vérifient $\varphi(u) = \psi(v)$ pour tout couple $(u, v) \in I \times J$, ces fonctions sont deux constantes de même valeur.

d) On suppose ici $0 < \mu < 1$; montrer que l'on peut se ramener au cas où :

$$\alpha(u) = \mu\, x_1(u)$$

$$\beta(v) = -\frac{1}{\mu}\, x_2(v)$$

En se servant de $\overrightarrow{N(u)P(v)}^2 = (\alpha(u) + \beta(v))^2$ et de II.9.c, trouver $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$.

e) Etudier de même le cas $\mu = 1$.

*****
***
*

MP'