

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE MP**

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'épreuve se compose d'un problème et d'un exercice obligatoires, totalement indépendants et représentant respectivement environ 3/4 et 1/4 de la note finale.

PROBLEME

L'étude d'intégrales impropres permet de définir, dans le cadre d'une analyse de Fourier, par plusieurs méthodes, le développement en série de deux fonctions continues par morceaux.

Remarque : Lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$ on dira que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

PARTIE I Etude et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et conséquences.

Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

$$\Sigma_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$$

1. a) Calculer, $\forall t$, la somme partielle $(S_n + i \Sigma_n)(t)$, ($i^2 = -1$)

b) En déduire alors, $S_n(t)$.

c) Calculer la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$.

Mathématiques 1 2/5

2. a) Démontrer que la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \end{cases} \quad 0 < t \leq \pi$$

est continue et dérivable.

b) Montrer que sa dérivée f' est bornée sur son intervalle de définition.

3. a) Montrer que la fonction f et sa dérivée f' vérifient l'égalité :

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$$

b) En déduire alors un majorant pour l'intégrale du premier membre de l'équation.

c) Qu'en déduit-on lorsque n tend vers $+\infty$?

4. a) Donner les variations de la fonction :

$$f^* : t \rightarrow \frac{\sin t}{t} \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

b) En déduire alors les inégalités :

$$\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2} dt \leq \frac{\pi}{2}$$

5. a) Justifier pour $x > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

b) Etudier ensuite la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

6. a) Montrer, en le justifiant avec soin, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt$$

b) En déduire alors la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

7. a) Etudier, pour $m \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$$

b) Calculer pour tout m réel :

$$A(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$$

PARTIE II Calcul d'intégrales impropres

1. Soient a et b deux réels différents :

a) Montrer qu'il existe un réel c , tel que la fonction k définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall x > 0, k(x) = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \quad \text{et pour } x = 0 \quad k(0) = c$$

soit continue sur \mathbb{R}^+ .

b) Donner alors la valeur de c .

2. a) Etablir la convergence de l'intégrale impropre :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

b) Calculer $I(a, b)$ en fonction de $|a|$ et $|b|$.

3. a) Vérifier que pour tout couple (α, β) de réels, l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x}{x^2} dx$$

est convergente.

b) Donner alors sa valeur $J(\alpha, \beta)$.

4. Dans la suite du problème x est un réel donné dans l'intervalle $[0, 1]$.

a) Etudier la continuité sur \mathbb{R}^+ de la fonction g_x de la variable y définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall y > 0, g_x(y) = \frac{2}{\pi y^2} (\sin xy - x \sin y) \quad \text{et} \quad g_x(0) = 0$$

b) La fonction de la variable t définie par :

$$f_x(t) = \int_0^{+\infty} g_x(y) \sin ty \, dy$$

est-elle définie sur \mathbb{R} ?

c) Donner l'éventuelle parité de $f_x(t)$.

d) Calculer la valeur de $f_x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ (on distinguera avec soin : $t < x$, $t \in [x, 1]$ et $t > 1$).

5. Déterminer l'ensemble E des points $t \in \mathbb{R}^+$ où f_x est dérivable et donner pour chacun d'eux la valeur de $f'_x(t)$.

6. a) Etudier pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ la convergence de l'intégrale impropre :

$$L(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy - x \sin y}{y} \cdot \cos ty \, dy$$

b) Calculer sa valeur.

c) Quelles remarques peut-on faire en liaison avec le 5° ?

d) Donner $\forall t \in \mathbb{R}^+$ la relation entre $L(x, t)$ et $f'_x(t)$.

PARTIE III Développements en série de Fourier

g est une fonction périodique, de période 2, définie par :

$$\forall t \in [0, 2], g(t) = \frac{1}{2}(2-t)t$$

1. Donner l'éventuelle parité de la fonction g .

2. a) Construire $g(t)$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de $g(t)$ et en déduire le développement de $g(t)$ en série de Fourier.

3. a) Calculer pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$:

$$F(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) - g(x-t)]$$

- b) Comparer $F(x, t)$ et $f_x(t)$ définie au II,4.d).
 c) En déduire alors un développement trigonométrique de la fonction f_x .

EXERCICE

Recherche d'une solution sur \mathbb{R} pour une équation différentielle du second ordre.

On considère l'équation différentielle :

$$(E1) \quad 2xy'' + y' - y = 0$$

1. Supposons qu'il existe des solutions développables en série entière sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- a) Donner, en le justifiant avec un très grand soin, la relation de récurrence entre les coefficients a_k pour tout k entier.
 b) Préciser le rayon de convergence de la série entière.
 c) Dans le cas particulier où $a_0 = 1$, donner une solution f de (E1) développable en série entière.
 d) Exprimer alors la fonction f précédente à l'aide de fonctions élémentaires.

2. On pose maintenant $y(x) = z(x)f(x)$.

- a) Ecrire l'équation différentielle (E2) vérifiée par $z(x)$.
 b) Dans les intervalles où f ne s'annule pas et où $z'(x) \neq 0$, $x \neq 0$ donner z .
 c) Exprimer alors, pour tout x réel, une solution de (E2) puis celle de (E1).