CONCOURS COMMUN INP 2025 .

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE 1

Q1. Fonction `degreMax`

On utilise la fonction `max` sur la liste des longueurs des listes d'adjacence. Le paramètre `default=0` gère le cas du graphe vide.

```python
def degreMax(d: dict) -> int:
    return max((len(d[u]) for u in d), default=0)
```

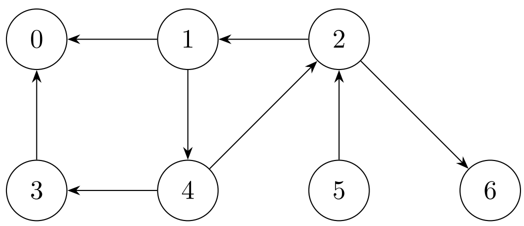
Q2. Graphe inverse

Définition : le graphe inverse possède les mêmes sommets mais avec les arêtes inversées.

Liste des arêtes inversées : `(1,0), (3,0), (2,1), (4,2), (5,2), (4,3), (1,4), (2,6)`

Dictionnaire :

`{0:  [], 1:  [0, 4], 2:  [1, 6], 3:  [0], 4:  [2, 3], 5:  [2], 6:  []}`



La fonction `grapheInv`

```python
def grapheInv(d: dict) -> dict:
    sommets = set(d.keys()) | {v for voisins in d.values() for v in
        voisins}
    d_inv = {s: [] for s in sommets}
    for u in d:
        for v in d[u]:
            d_inv[v].append(u)
    return d_inv
```

[1] Tous mes corrigés sont disponibles ici `https://tinyurl.com/4up84xze` 08-05-2025

Q3. La fonction `colorationValide`

Deux sommets reliés par une arête ne doivent pas avoir la même couleur.

On vérifie que tous les sommets concernés sont bien colorés et que les arêtes relient toujours deux sommets de couleurs distinctes.

```python
def colorationValide(d: dict, L: list) -> bool:
    for u in d:
        if u >= len(L):
            return False
        for v in d[u]:
            if v >= len(L) or L[u] == L[v]:
                return False
    return True
```

Q4. Complexité de `colorationValide`

Soit N le nombre de sommets total du graphe et M le nombre total d'arêtes.

- La boucle externe s'exécute $\mathcal{O}(N)$ fois (une fois par sommet).

- La boucle interne parcourt tous les voisins : en tout, $\mathcal{O}(M)$ itérations.

Complexité totale : $\mathcal{O}(N + M)$.

Q5. Requête SQL : durée maximale de location

```sql
SELECT MAX(duree) AS plus_grande_duree
FROM LOCATIONS;
```

Q6. Requête SQL : films loués en moyenne moins de 2 jours

On regroupe par film et on filtre ceux dont la moyenne de location est strictement inférieure à 2. On trie ensuite par durée décroissante.

```sql
SELECT
    F.codefilm,
    F.nomfilm,
    AVG(L.duree) AS duree_moyenne
FROM FILMS F
JOIN LOCATIONS L ON F.codefilm = L.codefilm
GROUP BY F.codefilm, F.nomfilm
HAVING AVG(L.duree) < 2
ORDER BY duree_moyenne DESC;
```

(Les solutions proposées pour les questions d'informatique qui, bien qu'élaborées avec attention, sont données à titre indicatif. Elles n'ont pas été rédigées par un enseignant spécialisé en informatique.)

EXERCICE 2

Polynômes de Tchebychev :

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

Q7. **Degré** P_n :

Montrons par récurrence que $\deg(P_n) = n$.

- *Initialisation :* On a $\deg(P_0) = 0$ et $\deg(P_1) = 1$.
- *Hérédité :* Supposons $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \leq n$ avec $n \geq 1$.

On a $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ donc

$$\deg(P_{n+1}) = \deg(XP_n) = 1 + \deg(P_n) = n + 1$$

C'est vrai pour $n+1$. Donc $\boxed{\deg(P_n) = n \text{ pour tout } n \geq 0}$.

Coefficient dominant de P_n **:**

Posons $P_n\ (X) = a_n X^n + ...$ La relation vérifiée par la suite (P_n) donne

$$a_{n+2}X^{n+2} + ... = 2X(a_{n+1}X^{n+1} + ...) - a_n X^n - ....$$

par unicité des coefficients on a $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 2 et $a_1 = 1$. Donc $\boxed{a_n = 2^{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } a_0 = 1}$.

Q8. Montrons cette propriété par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Pour $n = 0$: $P_0(\cos(\theta)) = \cos(0) = 1$. Pour $n = 1$: $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
- *Hérédité :* Supposons que $P_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$ pour tout $k \leq n+1$, pour un entier $n \geq 0$.

Donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}(\cos(\theta)) - P_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta). \end{aligned}$$

On utilise la formule trigonométrique $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, avec $A = (n+1)\theta$ et $B = \theta$:

$$2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta).$$

Donc, $P_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$.

La propriété est vraie pour $n+2$.

Ainsi , $\boxed{P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \theta \in \mathbb{R}}$.

Q9. Soit P et Q sont deux polynômes. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, donc elle est bornée sur $[-1, 1]$.

On a donc

$$\left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}} \text{ avec } M \in \mathbb{R}^+$$

- Au voisinage de 1^- : on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}.$$

par la règle de Riemann, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$,donc la fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$.

- Au voisinage de -1^+ : on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}.$$

par la règle de Riemann, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,0]$,donc la fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,0]$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge.

Q10. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$

- *Symétrie :*

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_k[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle.$$

- *Bilinéarité :*

Par symétrie, il suffit de vérifier la linéarité à gauche. Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_k[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha P_1 + \beta P_2, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{(\alpha P_1(t) + \beta P_2(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\alpha P_1(t)Q(t) + \beta P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_{-1}^{1} \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \beta \int_{-1}^{1} \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \alpha\langle P_1, Q\rangle + \beta\langle P_2, Q\rangle.
\end{aligned}$$

La bilinéarité est donc vérifiée.

- *Forme définie positive :*

Pour $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \geq 0$ (car $P(t)^2 \geq 0$ et $\sqrt{1-t^2} > 0$ sur $]-1,1[$).

Supposons $\langle P, P\rangle = 0$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0$.

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, son intégrale est nulle, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. Ceci signifie $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$, donc P admet une infinité de racines , par suite $P = 0$.

Conclusion : $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.

Q11. On utilise la formule

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)).$$

- Si $n \neq m$, alors

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0$$

- Si $n = m \neq 0$, alors

$$\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(2n\theta) + 1)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n} + \theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

- Si $n=m=0$, alors
$$\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta=\pi.$$

Finalement : $\boxed{\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ \pi & \text{si } n=m=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n=m\neq 0\end{cases}}$.

Q12. Base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.

Remarquons que , par le changement de variable $t=\cos\theta$, on a por tout n et m
$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_1^{-1}\frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$
d'après Q8 et Q11, $P_k(\cos\theta)=\cos(k\theta)$ donc
$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ \pi & \text{si } n=m=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n=m\neq 0\end{cases}$$
Ce qui donne $\|P_0\|=\sqrt{\pi}$ et pour $n\neq 0$, $\|P_n\|^2=\dfrac{\pi}{2}$, donc $\|P_n\|=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
Posons
$$T_0=\frac{P_0}{\|P_0\|}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{ et } T_n=\frac{P_n}{\|P_n\|}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n\text{ pour } n\geq 1$$
La famille $(T_n)_{0\leq n\leq k}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.

PROBLÉME.

Matrices de rang 1.

Partie 1 - Exemples

Soit $n\geq 2$ est un entier et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$. $U=(X_1,\ldots,X_n)^\intercal$, $M=UU^\intercal$.

Q13. Loi de $Y=\mathrm{rg}(M)$.

On a
$$M=UU^\intercal=\big[X_1U\big|X_2U\big|...\big|X_nU\big].$$
les colonnes de M sont colinéaires à U, donc $\mathrm{rg}(M)$ est égal à 0 ou 1,par suite $Y(\Omega)=\{0,1\}$.

Puisque
$$\mathrm{rg}(M)=0\iff M=0\iff U=0\iff X_i=0\text{ pour tout } i\in[\![1,n]\!].$$
Alors
$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X_1=0,\ldots,X_n=0)$$

Par l'indépendance des X_i on obtient

$$\mathbb{P}(Y=0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n.$$

Et on a $\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) = 1$ donc

$$\mathbb{P}(Y=1) = 1 - (1-p)^n.$$

Ainsi $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(1-(1-p)^n)}$.

Q14. Loi de $\mathrm{Tr}(M)$.

Ona $M_{ij} = X_i X_j$ donc

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Comme $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, X_i prend les valeurs 0 ou 1, donc $X_i^2 = X_i$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

(En effet : considérons les fonctions génératrices, on a $G_{X_i}(t) = (1-p+pt)$ et par indépendance

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Tr}(M)}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{G}_{X_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale).

Donc $\boxed{\mathrm{Tr}(M) \sim \mathcal{B}(n,p)}$.

Q15. Vérification $M^2 = \mathrm{Tr}(M)$.

On a

$$M^2 = (UU^\intercal)(UU^\intercal) = U(U^\intercal U)U^\intercal$$

comme

$$U^\intercal U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathrm{Tr}(M)$$

alors $\boxed{M^2 = \mathrm{Tr}(M)M}$.

Probabilité de l'événement V : « M est une matrice de projection ».

M est une matrice de projection si $M^2 = M$.

Ceci est équivalent à $\mathrm{Tr}(M)M = M$, soit $(\mathrm{Tr}(M)-1)M = 0$ (*l'application nulle est une projection!*).

Donc

$$V = [M=0] \cup [M \neq 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(M) = 1] = [M=0] \cup [\mathrm{Tr}(M) = 1]\,.$$

et

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M=0) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1)$$

On a

$$\mathbb{P}(M=0) = \mathbb{P}\left(\mathrm{rg}(M) = 0\right) = (1-p)^n \text{ (d'après Q13)}$$

et

$$\mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M)=1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$$

Donc $\mathbb{P}(V) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V) = (1-p)^{n-1}(1-p+np)}$.

Q16. **Cas** $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$**,** $\lambda > 0$.

On a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X_i = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. V : « M est une matrice de projection ».

D'après la question précédente

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1)$$

On a

$$\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, ..., X_n = 0)$$

pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et les X_i sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(M = 0) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = 0) = \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

Comme $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = 1$ et $X_i^2 \in \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ alors

$$\mathrm{Tr}(M) = 1 \Leftrightarrow \ \exists j \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } X_j = 1 \text{ et } X_i = 0 \text{ si } i \neq j$$

Soit E_j l'événement «$X_j = 1$ et $X_i = 0$ pour tout $i \neq j$» , on a alors

$$[\mathrm{Tr}(M) = 1] = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

c'est une réunion disjointe . Donc

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Tr}(M) = 1\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(E_j\right)$$

de plus

$$\mathbb{P}(E_j) = \mathbb{P}(X_j = 1) \prod_{k \neq j} \mathbb{P}(X_k = 0) = (\lambda \mathrm{e}^{-\lambda})(\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1} = \lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

par suite

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Tr}(M) = 1\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda \mathrm{e}^{-n\lambda} = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V) = \mathrm{e}^{-n\lambda} + n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda} = (1 + n\lambda)\mathrm{e}^{-n\lambda}}$.

Q17. **Matrice** J :

On a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

donc $\mathrm{rg}(J) = 1$ et . La trace de J est $\mathrm{Tr}(J) = n$.

Diagonalisation de J :

J est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

Puisque $\mathrm{rg}(J) = 1$ (et $n \geq 2$), 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$,qui est la dimension du sous-espace propre associé, $E_0(J) = \mathrm{Ker}(J)$.

Le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_J(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ et on sait que la trace est la somme des valeurs propres, donc $\lambda = \mathrm{Tr}(J) = n$. Par suite $\boxed{\chi_J(X) = X^{n-1}(X - n)}$.

On a

$$E_0(J) = \mathrm{Ker}(J) = \{(x_1, ..., x_n)\ |x_1 + ... + x_n = 0\} = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n\}$$

et

$$E_n(J) = \text{Vect}\{e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$$

Ainsi $J = P.D.P^{-1}$, avec $D = \text{diag}(n, 0, \ldots, 0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q18. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{Tr}(A) = 0$, $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .Si A est diagonalisable alors $A = 0_3$ ce qui est absurde , donc A n'est pas diagonalisable .

Partie 2 - Résultats généraux

Q19. Posons

$$A = \left[C_1 \middle| C_2 \middle| ... \middle| C_n\right].$$

Puisque $\text{rg}(A) = 1$, alors $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, ..., C_n)$ est de dimension 1. Soit C la première colonne non nulle de A ,on a $\text{Vect}(C) \subset \text{Im}(A)$ et ils sont tous les deux de dimension 1,donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C)$.

Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$dans $\mathbb{R}$, non tous nuls, tels $C_1 = \alpha_1 C, ..., C_n = \alpha_n C$.

Donc

$$A = \left[\alpha_1 C \middle| \alpha_2 C \middle| ... \middle| \alpha_n C\right] = C\ \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Posons $L = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{(0, ..., 0)\}$, alors $A = CL$.

Q20. Posons $C = (c_1 \ldots c_n)^\intercal$ et $L = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Les coefficients de A sont $A_{ij} = c_i \alpha_j$, donc

$$LC = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \text{Tr}(A).$$

Par suite

$$A^2 = (CL)(CL) = C\ (LC)\ L = C\ (\text{Tr}(A))\ L = \text{Tr}(A)\ (CL) = \text{Tr}(A)A.$$

Ainsi $\boxed{A^2 = \text{Tr}(A)A}$.

Q21. **Polynôme caractéristique et minimal de A .**

On a $A^2 - \text{Tr}(A)A = 0$. Donc le polynôme $P(X) = X(X - \text{Tr}(A))$ est annulateur de A. Le polynôme minimal $\pi_A(X)$ divise $P(X)$.

- Si $\pi_A(X) = X$ alors $A = 0$, absurde car $\text{rg}(A) = 1$, donc $\pi_A(X) \neq X$.
- Si $\pi_A(X) = X - \text{Tr}(A)$, alors $A = \text{Tr}(A)\text{I}_n$, dans ce cas $\text{rg}(A)$ est égale à n ou à 0 , absurde ($\text{rg}(A) = 1$), donc $\pi_A(X) \neq X - \text{Tr}(A)$.

Ainsi $\pi_A(X) = X(X - \text{Tr}(A))$,(*valable pour le cas* $Tr(A) = 0$).

Les valeurs propres de A sont donc 0 et $\mathrm{Tr}(A)$. 0 est de multiplicité égale à $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$.

Donc le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A)).$$

Finalement $\boxed{\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A)) \text{ et } \pi_A(X) = X(X - \mathrm{Tr}(A))}$.

Q22. A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Donc A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Q23. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

On a $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(u)$. Puisque $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$ et $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ alors $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

Ceci implique que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Construction de la base *:*

Soit $e_2 \in \mathrm{Im}(u)$ un vecteur non nul. Il existe $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) = e_2$. Nécessairement, $e_1 \notin \mathrm{Ker}(u)$ (car $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$).

Comme $e_2 \in \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(e_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

La famille (e_1, e_2) est libre : si $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, composer par u donne $\alpha e_2 = 0$ donc $\alpha = 0$, puis $\beta e_2 = 0$ et $\beta = 0$.

Puisque $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on peut compléter (e_2) en une base $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(u)$.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est libre : si $c_1 e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} c_i e_i = 0$, appliquer u donne $c_1 e_2 = 0$ donc $c_1 = 0$, la relation devient $\sum\limits_{i=2}^{n} c_i e_i = 0$, alors $c_i = 0$ car $(e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & (0) & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est le cas ou $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et A n'est pas diagonalisable.

Q24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. On a $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$.

L'hypothèse $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ implique que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

Posons $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$, $e_1 \neq 0$. On a $u(e_1) \in \mathrm{Im}(u))$ donc il existe $\alpha \neq 0$ tel que $u(e_1) = \alpha e_1$.

Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & (0) & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\alpha = \mathrm{Tr}(A)$.

Q25. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ (invariance de la trace par similarité).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = \tau$.

- **Si $\tau \neq 0$.** A et B sont diagonalisables , et sont semblables à la même matrice $D = \mathrm{diag}(\tau, 0, \dots, 0)$.

Donc A et B sont semblables .

- **Si $\tau = 0$.** On se retrouve dans le cas de Q23 , A et B ne sont pas diagonalisables et elles sont semblables à

la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Donc A et B sont semblables .

D'où l'équivalence .