

Partie I

I.1 Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels positifs distincts ou non, on a $S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres, alors $(X - 1)(X + 1)$ divise son polynôme caractéristique P . Comme P est de degré 2 et de coefficient dominant $(-1)^2 = 1$, alors $P = X^2 - 1$.

b) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1 .

I.3 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres $-1, 0$ et 1 .

I.4 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité $-1, -1, 1$ et 1 .

I.5 Supposons qu'il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité $-1, -1$ et 0 . Alors son polynôme caractéristique est $\chi_S(X) = -X(X + 1)^2 = -X^3 - 2X^2 - X$, d'autre part on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_S(X) = (-1)^3 X^3 + (-1)^2 \text{Tr}(S)X^2 + aX + \det S$ donc $\text{Tr}(S) = -2$, ce qui est absurde car les éléments de la diagonale de S sont tous positifs.

I.6 a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $H = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

⊙ Si $n = 1$ alors $H = (a)$ donc $\text{Sp}(H) = \{a\}$.

⊙ On suppose $n \geq 2$.

On a $H = (a - b)I_n + bJ_n$ où $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\text{rg} J_n = 1$ donc $\dim \text{Ker} J_n = n - 1$, alors 0 est une valeur propre de J_n d'ordre au moins $n - 1$.

$$\|PX\|_n^2 = {}^t(PX)PX = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|_n^2 \text{ par suite } \|PX\|_n = \|X\|_n.$$

II.2 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $(U, V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$.

a) Posons $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq p}$.

$$\text{On a } (Z \mid T)_{n+p} = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^p u_i v_i = (X \mid Y)_n + (U \mid V)_p.$$

b) Si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U, V orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$ alors $(X \mid Y)_n = 0$ et $(U \mid V)_p = 0$, donc $(Z \mid T)_{n+p} = 0$ par suite Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) La réciproque est fausse.

On prend $X = (1, 0, \dots, 0)$ et $Y = (1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et $U = (-1, 0, \dots, 0)$ et $V = (1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^p$. On a $(X \mid Y)_n = 1$, $(U \mid V)_p = -1$ et $(Z \mid T)_{n+p} = 0$.

Donc Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$ alors que X et Y ne le sont pas.

Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et

$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S . On pose $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.

II.3 a) Soit $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(DY \mid Y)_n = {}^tY {}^tDY = {}^tY DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha y_i^2 = \alpha \|Y\|_n^2.$$

b) Puisque $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec multiplicité, alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tPDP$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a

$$(SX \mid X)_n = {}^tX {}^tSX = {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = (D(PX) \mid PX)_n \leq \alpha \|PX\|_n^2$$

Comme $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors d'après II.1 c) $\|PX\|_n = \|X\|_n$ donc $(SX \mid X)_n \leq \alpha \|X\|_n^2$ et donc $\frac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

c) • Si X est un vecteur propre de S associé à α alors $SX = \alpha X$ et $X \neq 0$ donc $\frac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} = \frac{\alpha \|X\|_n^2}{\|X\|_n^2} = \alpha$.

• Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S telle que pour tout $i \in [[1, n]]$, X_i vecteur propre associé à la valeur propre de λ_i .

Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ où $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\frac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} = \alpha$ alors

$$\sum_{i=1}^n (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0. \text{ Comme } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \text{ alors pour tout } i \in [[1, n]], (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0.$$

Posons $I = \{ i \in [[1, n]] , x_i \neq 0 \}$, on a $X = \sum_{i \in I} x_i X_i$ et pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \alpha$ donc

$$SX = \sum_{i \in I} x_i \lambda_i X_i = \alpha \sum_{i \in I} x_i X_i = \alpha X.$$

Ainsi X est un vecteur propre de S associé à la valeur propre α .

II. 4 Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \geq 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_n = 1\}$ et $C = E \cap \Sigma$.

a) Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = (x_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n}$, on a $\|X_k - X\|_n \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc pour tout $i \in [[1, n]]$, $(x_i^{(k)} - x_i)^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $i \in [[1, n]]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_i^{(k)} \geq 0$ et $x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_i$ donc $x_i \geq 0$ par suite $X \in E$.

Donc E est fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_n = 1\}$ est la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc Σ est un fermé, borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a $C = E \cap \Sigma$ est l'intersection de deux fermés de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc C est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$C \subset \Sigma$ et Σ est borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors C est borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi C est un fermé, borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Posons $S = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $SX = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

où pour tout $i \in [[1, n]]$, $y_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k$.

donc $\varphi(X) = (SX | X)_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_i x_k$

Ainsi $\varphi(X)$ est un polynôme en les coefficients de X , donc φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) On pose $\mu = \sup_{X \in C} \varphi(X)$.

On a C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc C est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a φ est continue sur le compact C donc φ est bornée et atteint ses bornes sur C , alors $\mu = \sup_{X \in C} \varphi(X)$ existe et il existe $X_0 \in C$ tel que $\mu = \varphi(X_0)$.

e) On a d'après II.3 b) $\forall X \in C$, $\varphi(X) = (SX | X)_n \leq \alpha \|X\|_n^2 = \alpha$, donc $\mu = \varphi(X_0) \leq \alpha$.

II.5 On suppose dans cette question que $S \geq 0$.

a) Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α , on pose $W = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

i) Il est clair que $W \in E$.

On a $\|W\|_n^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|X\|_n^2 = 1$, donc $W \in \Sigma$ par suite $W \in C$.

ii) Posons $S = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a d'après II.4.c) $\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_i x_k$,

donc $|\varphi(X)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} x_i x_k| = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} |x_i| |x_k| = \varphi(W)$.

iii) On a d'après II.3 c) puisque X est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α alors $\varphi(X) = (SX | X)_n = \alpha \|X\|_n^2 = \alpha$ et d'après II.5 a) ii)

$|\varphi(X)| \leq \varphi(W)$, donc $|\alpha| \leq \varphi(W)$. Comme $W \in C$ alors $\varphi(W) \leq \mu$ et alors $|\alpha| \leq \mu$.

b) On a d'après II.4 e) et II.5 a) iii) $|\alpha| \leq \mu \leq \alpha$, donc $\alpha \geq 0$ et $\mu = \alpha$.

D'après II.4 d) il existe $X_0 \in C$ tel que $\mu = \varphi(X_0)$.

Posons $X_0 = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $W_0 = (|\gamma_i|)_{1 \leq i \leq n}$, on a $W_0 \geq 0$ et d'après II.5 a) $W_0 \in C$ et $\mu = |\varphi(X_0)| \leq \varphi(W_0) \leq \mu$ donc $\varphi(W_0) = \mu = \alpha$.

D'après II.3 c) W_0 est un vecteur propre positif de S associé à la valeur propre α .

c) Soit $i \in [[1, n]]$ et X_i un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre λ_i .

Posons $X_i = (\delta_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $W_i = (|\delta_j|)_{1 \leq j \leq n}$, on a d'après II.5 a)

$W_i \in C$ et $|\varphi(X_i)| \leq \varphi(W_i)$.

Comme $\varphi(X_i) = \lambda_i \|X_i\|_n^2 = \lambda_i$ alors $|\lambda_i| = |\varphi(X_i)| \leq \varphi(W_i) \leq \mu = \alpha$.

Partie III

III.1 Soit $i \in [[2, n]]$, on a $M_s Z_i = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1 {}^t X_1 X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i Z_i$ car ${}^t X_1 X_i = 0$.

Ainsi Z_i est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre α_i .

Soit $j \in [[2, p]]$, on a $M_s T_j = \begin{pmatrix} sX_1 {}^t Y_1 Y_j \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j Y_j \end{pmatrix} = \beta_j T_j$ car ${}^t Y_1 Y_j = 0$.

Ainsi T_j est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre β_j .

III 2 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $V(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos \theta) X_1 \\ (\sin(\theta) Y_1 \end{pmatrix}$.

a) On a d'après II.2 a)

$$\|V(\theta)\|_{n+p}^2 = \|(\cos \theta) X_1\|_n^2 + \|(\sin(\theta) Y_1)\|_p^2 = (\cos \theta)^2 \|X_1\|_n^2 + (\sin(\theta))^2 \|Y_1\|_p^2 = 1.$$

Donc $V(\theta)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

b) On a $\chi_{M_0}(X) = \det(A - X I_n) \det(B - X I_p) = \chi_A(X) \cdot \chi_B(X)$.

Donc $Sp(M_0) = Sp(A) \cup Sp(B) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ comptées avec multiplicité.

c) On suppose que $s \neq 0$. On note θ_1 l'unique réel de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que

$$\tan \theta_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}. \text{ On pose } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}.$$

i) Raisonnons par absurde, supposons que $\theta_1 = 0$ alors

$\tan \theta_1 = 0$ donc $\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = 0$ par suite $s = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\theta_1 \neq 0$.

ii) On a $\tan \theta_2 = -\frac{1}{\tan \theta_1}$ donc $\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = -1$.

iii) On a $\tan \theta_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$

$$\text{donc } (2s \tan \theta_1 - (\beta_1 - \alpha_1))^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2$$

et puisque $\tan \theta_1 \neq 0$ alors $\alpha_1 + s \tan \theta_1 = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta_1}$.

D'autre part $\tan \theta_1 = -\frac{1}{\tan \theta_2}$, donc $\alpha_1 + s \tan \theta_2 = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta_2}$.

Ainsi θ_1 et θ_2 vérifient l'équation : $\alpha_1 + s \tan \theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta}$.

iv) Soit $i \in \{1, 2\}$, on a $M_s V(\theta_i) = \begin{pmatrix} (\cos \theta_i) A X_1 + s(\sin \theta_i) X_1 {}^t Y_1 Y_1 \\ s(\cos \theta_i) Y_1 {}^t X_1 X_1 + (\sin \theta_i) B Y_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_1 + s \tan \theta_i)(\cos \theta_i) X_1 \\ \left(\beta_1 + \frac{s}{\tan \theta_i} \right) (\sin \theta_i) Y_1 \end{pmatrix}$$

car ${}^t Y_1 Y_1 = {}^t X_1 X_1 = 1$, $A X_1 = \alpha_1 X_1$ et $B Y_1 = \beta_1 Y_1$.

D'après III.2 c) iii) on a $\alpha_1 + s \tan \theta_i = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta_i}$ donc $M_s V(\theta_i) = (\alpha_1 + s \tan \theta_i) V(\theta_i)$.

Comme $V(\theta_i) \neq 0$ alors $V(\theta_i)$ est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre $\mu_i = \alpha_1 + s \tan \theta_i$

On remplace $\tan \theta_i$ par sa valeur on trouve :

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} \right) \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} \right).$$

v) On a

- $\forall (i, j) \in [[2, n]]^2 \quad (Z_i | Z_j)_{n+p} = (X_i | X_j)_n + (0 | 0)_p = \delta_{i,j}$.
- $\forall (i, j) \in [[2, p]]^2 \quad (T_i | T_j)_{n+p} = (0 | 0)_n + (Y_i | Y_j)_p = \delta_{i,j}$.
- $\forall (i, j) \in [[2, n]] \times [[2, p]] \quad (Z_i | T_j)_{n+p} = (X_i | 0)_n + (0 | Y_j)_p = 0$.
- Soit $k \in \{1, 2\}$

$$\forall i \in [[2, n]] \quad (V(\theta_k) | Z_i)_{n+p} = ((\cos \theta_k) X_1 | X_i)_n + ((\sin \theta_k) Y_1 | 0)_p = (\cos \theta_k) (X_1 | X_i)_n = 0.$$

$$\forall j \in [[2, p]] \quad (V(\theta_k) | T_j)_{n+p} = ((\cos \theta_k) X_1 | 0)_n + ((\sin \theta_k) Y_1 | Y_j)_p = (\sin \theta_k) (Y_1 | Y_j)_p = 0.$$

$$(V(\theta_k) | V(\theta_k))_{n+p} = ((\cos \theta_k) X_1 | (\cos \theta_k) X_1)_n + ((\sin \theta_k) Y_1 | (\sin \theta_k) Y_1)_p$$

$$= (\cos \theta_k)^2 (X_1 | X_1)_n + (\sin \theta_k)^2 (Y_1 | Y_1)_p = 1$$

- $(V(\theta_1) | V(\theta_2))_{n+p} = ((\cos \theta_1) X_1 | (\cos \theta_2) X_1)_n + ((\sin \theta_1) Y_1 | (\sin \theta_2) Y_1)_p$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \left(\frac{1}{\tan \theta_2} + \tan \theta_1 \right) = 0.$$

Ainsi $(V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, \dots, Z_n, T_2, \dots, T_p)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^{n+p}$ de cardinal $n+p$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^{n+p}$ formée de vecteurs propres de M_s et les valeurs propres de M_s sont $\mu_1, \mu_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_p$ comptées avec multiplicité.

vi) Si on prend $s = 0$ dans les formules de μ_1 et μ_2 on trouve :

$$\mu_1 = \frac{1}{2} (\beta_1 + \alpha_1 + |\alpha_1 - \beta_1|) \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{1}{2} (\beta_1 + \alpha_1 - |\alpha_1 - \beta_1|).$$

Si $\beta_1 \leq \alpha_1$ alors $\mu_1 = \alpha_1$ et $\mu_2 = \beta_1$.

Si $\alpha_1 \leq \beta_1$ alors $\mu_1 = \beta_1$ et $\mu_2 = \alpha_1$.

On retrouve ainsi deux valeurs propres de M_0 .

Partie IV

On considère la propriété (P_n) suivante :

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$$

alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+)$ tel que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

IV.1 Si λ_1 un élément de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \geq 0$, prenons $A = (\lambda_1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On a $A \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^+)$ et λ_1 est la valeur propre de A , donc (P_1) est vraie .

IV.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_n) soit vraie et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifient :
 $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1}$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0$.
 Posons $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1}$.

a) On a $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \geq 0$ car pour tout $i \in [[2, n]]$ on a $\lambda_i \leq 0$.
 On a $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $a + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$

Puisque la propriété (P_n) est vraie, alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+)$ tel que $a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Dans la suite de la question IV.2, A désignera une telle matrice.

b) On a $a = \max(\{\lambda_i, i \in [[2, n]]\} \cup \{a\})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+)$, donc d'après II.5 b), A admet un vecteur propre positif X associé à la valeur propre a .

On prend $X_1 = \frac{1}{\|X\|_n} X$, on a X_1 est un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre a .

c) Pour s réel, soit M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s {}^tX_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) M_s est bien de la forme (1) avec $p = 1$, $B = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y_1 = (1) \in \mathbb{R}$.
 Car $sY_1 {}^tX_1 = s {}^tX_1$ et $sX_1 {}^tY_1 = sX_1$.

ii) On a les valeurs propres de A sont $a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et la seule valeur propre de B est $\beta_1 = 0$.

- Si $s = 0$, d'après III.2 b) (ou directement) les valeurs propres de M_s sont $0, a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
- Si $s \neq 0$, d'après III.2 c) v) on a puisque $\beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = a$ alors

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4s^2} \right) \text{ et } \mu_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4s^2} \right)$$

et les valeurs propres de M_s sont $\mu_1, \mu_2, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

iii) Supposons que $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$.

- Si $s = 0$ alors $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_1 = 0$ alors $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}$ et si $\lambda_{n+1} = 0$ alors $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} = \lambda_1$

Donc d'après IV.2 c) ii) les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.

- Si $s \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4s^2}) = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_{n+1} + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{n+1})^2 - 4\lambda_1 \lambda_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_{n+1} + |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|) = \lambda_1. \end{aligned}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_{n+1} - |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|) = \lambda_{n+1}.$$

Donc d'après IV.2 c) ii) les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.

Dans tous les cas les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.

De plus $M_s \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}+)$.

Donc la propriété (P_{n+1}) est vraie .

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) est vraie.

IV. 3 Exemple.

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A(X) = -(X+1)(X-6)(X+3)$ donc $Sp(A) = \{-3, -1, 6\}$.

b) Posons $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.

On a $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \geq 0$.

Posons $a = \lambda_1 + \lambda_4 = 6$

On a les valeurs propres de la matrice A de la question IV. 3 a) sont a, λ_2 et λ_3 .

On applique IV. 3 .

Cherchons X_1 un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} AX = 6X &\iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \iff x = y = z \end{aligned}$$

Donc $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ est un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.

$$\text{Prenons } s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_4} = 3\sqrt{3} \text{ et } B = M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s^t X_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On a B est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4, admettant pour valeurs propres $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.