Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2023

Préambule

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$. D'une part $(x - x_1)g(x) = a_1 + a_2\dfrac{x - x_1}{x - x_2} + a_3\dfrac{x - x_1}{x - x_3}$, et comme x_1, x_2 et x_3 sont distincts,
$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)g(x) = a_1.$$
D'autre part :
$$(x - x_1)g(x) = \frac{(x - x_1)P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\frac{Q(x)}{x - x_1}} = \frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(x_1)}{x - x_1}}$$
et comme Q est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{Q(x) - Q(x_1)}{x - x_1} = Q'(x_1)$. La fonction P étant polynomiale et continue, $\lim\limits_{x \to x_1} P(x) = P(x_1)$. Comme x_1, x_2 et x_3 sont distincts, x_1 est une racine simple de Q, donc $Q'(x_1) \neq 0$. Ainsi,
$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)g(x) = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$
Par unicité de la limite, on obtient $\boxed{a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}}$. En remplaçant, dans le raisonnement précédente, x_1 par x_i, on obtient directement $\boxed{a_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}}$ et $\boxed{a_3 = \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)}}$.
2. Avec les données numériques pour cette question, on a $Q(x) = x(x+1)(x + \frac{1}{2})$, donc en dérivant avec la formule de dérivation du produit : $Q'(x) = (x + 1)(x + \frac{1}{2}) + x(x + \frac{1}{2}) + x(x + 1)$ qui donne $Q'(0) = \frac{1}{2}$, $Q'(-1) = \frac{1}{2}$ et $Q'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.
Finalement : $\boxed{a_1 = a_2 = 2 \text{ et } a_3 = -4}$

Partie I

1. La fonction F est définie en un réel x si et seulement si
$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} > 0 \quad \text{et} \quad (2x+1)^2 \neq 0$$
c'est-à-dire $x(x + 1) > 0$ et $x \neq -1/2$. Compte-tenu de l'énoncé, on peut raisonner avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Ce tableau permet de conclure que $\boxed{\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$.
2. La fonction
$$\varphi : x \mapsto \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$$
est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, cette fonction est strictement positive sur $\mathcal{D}_F$ donc, par composition, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F}$.
3. Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, par formule de dérivation d'une composée et d'un quotient :
$$F'(x) = \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \times \frac{(x + x + 1)(2x+1)^2 - x(x+1) \times 2 \times 2(2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{1}{x(x+1)} \times \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{(2x+1)}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)} \times \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x}{(2x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$
d'où la formule $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_F,\ f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)}}$.

4. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. On pose $u_n = |f(n)z^{2n+1}|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > 0$ puis :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \frac{|z|^{2n+3}}{|z|^{2n+1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2n^3}{2n^3}|z|^2 = |z|^2$$
Par le critère de d'Alembert :
   - si $|z| < 1, \sum u_n$ converge donc $R \geqslant 1$;
   - si $|z| > 1, \sum u_n$ diverge (grossièrement) donc $R \leq 1$.

   d'où : $\boxed{R = 1}$.

   (b) Cette fonction a un développement en série entière dont le rayon de convergence vaut 1 et on a :
$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) x^n}.$$

   (c) i. On sait que la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. En effectuant un changement de variable (si $x \in]-1, 1[$ alors $x^2 \in]-1, 1[$), on a :
$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}.$$
avec un rayon de convergence égal à 1.

   ii. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a :
$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x) \times (1 + x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - x}$$
Ainsi pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x^2}$ s'exprime comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ On a précisément : $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, 1[,\ \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}\right)}$

   (d) Avec la question précédente, on peut déterminer l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0. Celle-ci est donnée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$ qui s'écrit
$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$
Or, d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière, le développement de cette fonction s'obtient à l'aide du développement en série entière de la question Partie I 4(c)i avec le même rayon de convergence. Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ admet un développement en série entière sur $]-1, 1[$ dont le rayon de convergence est $R = 1$ (c'est bien la même valeur qu'en Partie I 4a), et on a :
$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}}.$$

   (e) Lorsque $x \in]-1, 1[$, $x^2 \in]-1, 1[$ donc en effectuant un changement de variable dans la question Partie I 4b, on obtient l'égalité $\ln(1 - x^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) x^{2n}$ puis en multipliant par $-x$ cette série convergente,
$$\boxed{\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1 - x^2)}.$$

   (f) On a montré dans la question Préambule 2 que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$, $g(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+\frac{1}{2}}$ et comme $f = \frac{1}{2}g$, il vient alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$. De façon analogue à la méthode de la question Partie I 4a, on peut justifier que $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} - x^2\right) = -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - x.$$

Avec la décomposition en éléments simples de f, on obtient ainsi (toutes les séries étant convergentes), pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \left(-x\ln(1-x^2)\right) + \left(-\frac{\ln(1-x^2)}{x} - x\right) - 4 \times \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\right)\end{aligned}$$

puis

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} = 3x - \frac{x^2+1}{x}\ln(1-x^2) - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

et cette série entière vaut 0 en 0.

(g) En reformulant l'expression précédente, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= 3x - \frac{x^2+1}{x}\big(\ln(1+x) + \ln(1-x)\big) - 2\ln(1+x) + 2\ln(1-x) \\ &= 3x - \frac{x^2+2x+1}{x}\ln(1+x) - \frac{x^2-2x+1}{x}\ln(1-x) \\ &= 3x - \frac{(x+1)^2}{x}\ln(1+x) - \frac{(x-1)^2}{x}\ln(1-x).\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2\ln(1-x) = 0$ par croissances comparées donc, par somme et quotient, l'expression précédente de la série entière admet un limite en 1 et :

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1}\right) = 3 - 4\ln(2)}.$$

5. (a) On a, par quotient, $f(n) \sim \frac{1}{2n^3}$ au voisinage de $+\infty$, or $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série usuelle de Riemann convergente (car $3 > 1$). Ainsi ($\sum f(n)$ étant une série à termes positifs), par critère d'équivalence des séries positives, $\boxed{\text{la série } \sum f(n) \text{ est convergente.}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare les termes pairs et impairs dans $H(2n+1)$ pour obtenir :

$$H(2n+1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k\text{pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k\text{impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k};$$

- les entiers k pairs entre 1 et $2n+1$ s'écrivent $k = 2p$, p variant de 1 (le premier pair est 2) à n (le dernier est $2n$) ;
- les entiers k impairs entre 1 et $2n+1$ s'écrivent $k = 2q+1$, q variant de 0 (le premier impair est 1) à n (le dernier est $2n+1$).

Ainsi :

$$H(2n+1) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2}H(n) + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1}$$

qui donne le résultat (en renommant l'indice) : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)}$.

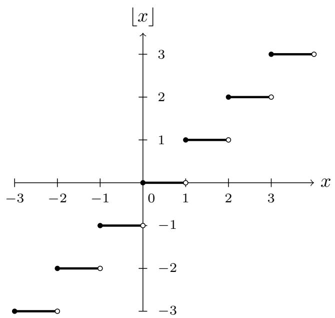
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, avec la question précédente :

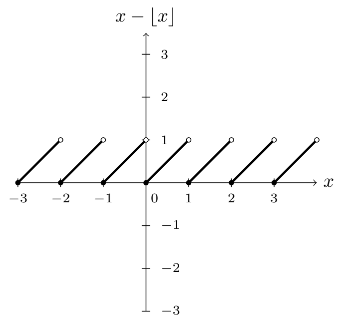
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) \\ &= H(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\ &= H(n) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - 1\right) \\ &= H(n) + \left(H(n) - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 4\left(H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) - 1\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}}$.

Partie II

1. On a les graphes suivants (l'échelle n'est pas nécessairement respectée sur ce corrigé) :





2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} A(k)\{u_{k+1} - u_k\} &= \sum_{k=1}^{n} A(k)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} A(k)u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} A(k-1)u_k - \sum_{k=1}^{n} A(k)u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} A(k-1)u_k - \sum_{k=1}^{n} A(k)u_k \text{ (car } A(0) = 0) \\ &= A(n)u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A(k-1)u_k - \sum_{k=1}^{n} A(k)u_k \\ &= A(n)u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (A(k-1)u_k - A(k)u_k)\end{aligned}$$

qui donne finalement l'expression :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} A(k)\{u_{k+1} - u_k\} = \sum_{k=1}^{n} \{A(k-1) - A(k)\}\, u_k + A(n)u_{n+1}}.$$

3. On rappelle que pour tout entier naturel n, par définition de la partie entière, $\lfloor n \rfloor = n$. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, $A(n_x) = \sum_{k=1}^{\lfloor n_x \rfloor} a_k = \sum_{k=1}^{n_x} a_k = A(x)$ ce qui s'écrit $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 1,\ A(n_x) = A(x)}$.

4. Pour $t \in [k, k+1[$, $n_t = k$ donc $A(t)h'(t) = A(k)h'(t)$. On peut donc prolonger la fonction $t \mapsto A(t)h'(t)$ en $k+1$ par la valeur $A(k)h'(k+1)$. Ceci permet d'en déduire que l'intégrale mise en jeu $\int_k^{k+1} A(t)h'(t)dt$ est faussement impropre en $k+1$ et on a l'égalité : $\boxed{\int_k^{k+1} A(t)h'(t)dt = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)dt}$.

5. Soit $x \geqslant 1$ un réel fixé. Considérons la fonction

$$h_A : \begin{array}{ll} [1, n_x[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto A(t)h'(t) \end{array}.$$

Cette fonction n'est pas continue sur $[1, n_x[$ (mais seulement continue par morceaux, ce qui ne fait pas partie du programme de PT), mais elle l'est sur chaque intervalle de la forme $I_k = [k, k+1[$ pour k entier entre 1 et $n_x - 1$. De plus pour un tel k, on a $\forall t \in I_k, h_A(t) = A(k)h'(t)$ et ainsi h_A est continue sur I_k et prolongeable par continuité en $k+1$ car h est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\int_k^{k+1} h_A(t)dt$ est convergente, car définie en k et faussement impropre en $k+1$. En admettant que la relation de Chasles est encore valable dans ce cadre, on en déduit que $\int_1^{n_x} h_A(t)dt$ est convergente et que : $\int_1^{n_x} h_A(t)dt = \sum_{k=1}^{n_x-1}\int_k^{k+1} h_A(t)dt$. Or pour tout $k \in [\![1, n_x - 1]\!]$, $\int_k^{k+1} h_A(t)dt = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)dt = A(k)\{h(k+1) - h(k)\}$ ce qui donne finalement :

$$\boxed{\int_1^{n_x} A(t)h'(t)dt = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\{h(k+1) - h(k)\}}.$$

6. Pour tout $k \in [\![2, n_x - 1]\!]$, $A(k) - A(k-1) = \sum_{l=1}^{k} a_l - \sum_{l=1}^{k-1} a_l$ d'où finalement la relation, par télescopage : $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![2, n_x - 1]\!],\ A(k) - A(k-1) = a_k}$
Ceci est également vrai pour $k = 1$ avec la convention $A(0) = 0$.

7. (a) Soit $x \geqslant 1$ un réel fixé pour toute la question. En substituant $n_x - 1$ à n et $h(k)$ à u_k dans le résultat de la question Partie II 2, on obtient exactement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\{h(k+1) - h(k)\} &= \sum_{k=1}^{n_x-1}\{A(k-1) - A(k)\}h(k) + A(n_x - 1)h(n_x) \\ &= \sum_{k=1}^{n_x-1}\{A(k-1) - A(k)\}h(k) + A(n_x - 1)h(n_x) - A(n_x)h(n_x) + A(n_x)h(n_x) \\ &= \sum_{k=1}^{n_x}\{A(k-1) - A(k)\}h(k) + A(n_x)h(n_x).\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\{h(k+1) - h(k)\} = \sum_{k=1}^{n_x}\{A(k-1) - A(k)\}h(k) + A(n_x)h(n_x)}$.
Il y avait une erreur d'énoncé, la dernière somme commence bien à 1 et pas à 2.

(b) Soit $x \geqslant 1$ un réel. On utilise successivement pour chacune des égalités suivantes Partie II 6 et 7a puis 5 pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) &= \sum_{k=1}^{n_x}\{A(k) - A(k-1)\}h(k) \\ &= A(n_x)h(n_x) - \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\{h(k+1) - h(k)\} = A(n_x)h(n_x) - \int_1^{n_x} A(t)h'(t)dt\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in [n_x, x]$, $A(t) = A(n_x)$ et donc

$$\int_{n_x}^{x} A(t)h'(t)dt = A(n_x)(h(x) - h(n_x)) = A(x)h(x) - A(n_x)h(n_x).$$

ce qui donne en retournant l'égalité $A(n_x)h(n_x) = A(x)h(x) - \int_{n_x}^{x} A(t)h'(t)dt$.

Cette dernière relation donne finalement : $\boxed{\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) = A(x)h(x) - \int_1^x A(t)h'(t)dt}$.

8. (a) Pour tout réel $t \geqslant 1$, $A(t) = A(n_t) = \sum_{k=1}^{n_t} 1 = n_t$ (c'est une somme de n_t termes qui valent tous 1) donc : $\boxed{\text{pour tout réel } t \geqslant 1,\ A(t) = n_t}$.

(b) Soit $x \geqslant 1$ un réel. La fonction h et la fonction identité étant de classe C^1, on peut effectuer une intégration par parties d'une intégrale définie sur le segment $[1, n_x]$, en dérivant h en intégrant la fonction constante égale a 1 (qui est la dérivée de la fonction identité) pour obtenir :

$$\int_1^{n_x} h(t)dt = [th(t)]_1^{n_x} - \int_1^{n_x} th'(t)dt = n_x h(n_x) - h(1) - \int_1^{n_x} th'(t)dt$$

Finalement : $\boxed{n_x h(n_x) - h(1) = \int_1^{n_x} h(t)dt + \int_1^{n_x} th'(t)dt}$

(c) Soit $x \geqslant 1$ un réel. En appliquant les résultat 3 7b dans notre cas, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x} h(k) &= n_x h(x) - \int_1^x n_t h'(t)dt \\ &= h(1) + (n_x h(x) - h(1)) - \int_1^x n_t h'(t)dt \\ &= h(1) + \int_1^{n_x} h(t)dt + \int_1^{n_x} th'(t)dt - \int_1^x n_t h'(t)dt = h(1) + \int_1^{n_x} h(t)dt + \int_1^{n_x}\{t - n_t\}h'(t)dt\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la linéarité pour des intégrales généralisées convergentes ($\int_1^x n_t h'(t)dt$ étant du même type que celle de la question Partie II 5). Ceci donne finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = h(1) + \int_1^{n_x}\{t - n_t\}h'(t)dt + \int_1^{n_x} h(t)dt}.$$

9. (a) i. Par définition de la partie entière, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a : $n_t \leq t < n_t + 1$, et donc $t - n_t \in [0, 1[$ ce qui donne

$$0 \leq \frac{t - n_t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

ce qui donne, par définition des relations de comparaison, au voisinage de $+\infty$: $\boxed{\frac{t - n_t}{t^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$.

ii. *Cette question est hors-programme en PT.*
La fonction $t \mapsto (t - n_t)/t^2$ est continue par morceaux et positive sur $[1, +\infty[$. De plus $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est, en tant que fonction de référence de Riemann, intégrable sur $[1, +\infty[$. Par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées, avec la comparaison de la question précédente $\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt \text{ est convergente}}$.

iii. Par définition, la question précédente donne

$$\int_1^X \frac{t - n_t}{t^2}dt \underset{\substack{X \to +\infty \\ X \in \mathbb{R}}}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt$$

donc, par composition de limites

$$\int_1^N \frac{t - n_t}{t^2}dt \underset{\substack{N \to +\infty \\ N \in \mathbb{N}}}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt$ étant convergente et $\int_1^N \frac{t - n_t}{t^2}dt$ également, la relation de Chasles pour les intégrales généralisées et la limite précédente donnent :

$$\boxed{\int_N^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt = \int_1^{+\infty}\frac{t - n_t}{t^2}dt - \int_1^N \frac{t - n_t}{t^2}dt \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

(b) En appliquant directement le résultat Partie II8c à la fonction $h : t \mapsto 1/t$ et à $x = N = n_x$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 - \int_1^N \frac{\{t - n_t\}}{t^2} dt + \int_1^N \frac{dt}{t}}.$$

(c) Posons $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - n_t}{t^2} dt$. Au voisinage de $+\infty$, avec la question Partie II9(a)ii,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \gamma + o(1) + \int_1^N \frac{dt}{t} = \gamma + o(1) + \ln(N) - \ln(1)$$

et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln(N) + \gamma + o(1)}$.

10. Avec la développement asymptotique précédent, on obtient, lorsque l'entier n est au voisinage de $+\infty$:

$$4H(n) - 4H(2n+1) = 4(\ln(n) + \gamma - \ln(2n+1) - \gamma) + o(1) = 4\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) + o(1)$$

donc, par composition, la limite demandée existe et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} 4H(n) - 4H(2n+1) = -4\ln(2)}$.

11. Par somme de limites dans la question Partie II 5c de la partie I, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = 3 - 4\ln(2)}$.