10MP01

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours

1. Donner la définition de deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E.

2. On prend $E = \mathbb{R}^n$ et on rappelle que les applications

$$N_p : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto N_p(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , p \geqslant 1 \text{ et } N_\infty : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto N_\infty(X) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Prouver, par un calcul explicite, que $\forall p \geqslant 1$, N_p et N_∞ sont équivalentes.

3. Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont-elles équivalentes ? (On ne demande pas de démonstration).

4. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme N_∞.
Peut-on trouver $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(u(X)) \leqslant K\, N_\infty(X)$?
Dans l'affirmative, donner une valeur de K.

5. Citer sans démonstration trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé soit continu.

6. Caractériser les endomorphismes continus de $\mathbb{R}^n$. On justifiera la réponse.

Partie 1.

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $||X||$.

L'espace E est orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale directe de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale.

2. Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme u.

3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

4. On rappelle que si w est un endomorphisme continu de E, ($w \in \mathcal{L}_C(E)$), la norme de l'endomorphisme w est définie par :

$$|||w||| = \sup_{||X||=1} ||w(X)||$$

4.1 Vérifier que u est un endomorphisme continu de E et que : $|||u||| = 1$.

4.2 Soit $w \in \mathcal{L}_C(E)$. Prouver qu'il existe $X_0 \in E$ tel que $\|X_0\| = 1$ et $|||w||| = \|w(X_0)\|$

5. On définit dans $\mathcal{L}_C(E)$ la suite (u^k) des endomorphisme itérés de u : $u^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u^{k-1} \circ u$.
Prouver que la suite (u^k) est une suite bornée de $\mathcal{L}_C(E)$.

6. Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = id_E - u$.

6.1 Déterminer $\ker(v)$.

6.2 $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont-ils orthogonaux ?

6.3 Prouver que $E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

6.4 En déduire que, pour tout $X \in E$, il existe $Z \in E$, et un unique $X_1 \in \ker(v)$ tels que :

$$X = X_1 + Z - u(Z)$$

6.5 On pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$.
Montrer que $\forall X \in E$, la suite $(p_m(X))$ converge vers la projection de X sur $\ker(v)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(v)$.

Partie 2.

On prend dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $||X||$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente dans la base $\mathcal{B}$ un endomorphisme u de E, on note $|||\,A\,||| = \sup\limits_{||X||=1} ||AX||$.

1. Vérifier que $|||\ \ |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Quelques propriétés de la matrice $B = {}^tAA$.

2.1 Montrer que B est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont positives ou nulles.
Etudier le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.2 On note $\rho(B) = \sup\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$ où $\mathrm{sp}(B)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice B.
Soit U une matrice semblable à B. A-t-on $\rho(U) = \rho(B)$?

2.3 Montrer que $|||\,A\,|||^2 \leqslant \rho(B)$.

2.4 Prouver enfin que $|||\,A\,|||^2 = \rho(B)$.

3. On suppose dans cette question que u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$.

3.1 Calculer $|||\,A\,|||$.

3.2 Dans quel cas la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

3.3 On suppose que $|\gamma| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_m = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.

Expliciter pour tout $m \in \mathbb{N}$, P_m puis déterminer $\lim\limits_{m \to \infty} P_m$.

4. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme de E diagonalisable et on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de u, les λ_i étant distincts ou non.

4.1 Calculer $|||\, A \,|||$.

4.2 Dans quel cas la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

4.3 On suppose que $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $|\lambda_i| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.

Calculer $\lim\limits_{m \to \infty} P_m$.

Partie 3.

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel normé réel de dimension finie n, et que u est un endomorphisme continu de E tel que la suite des endomorphismes itérés $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans $(\mathcal{L}_C(E), |||\ |||)$.
On pose $v = id_E - u$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \dfrac{1}{m}(id_E + u + u^2 + ... + u^{m-1})$.

1. Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, X \in \ker(v)$, $p_m(X) = X$.

2. Justifier le fait que $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $p_m \circ v = v \circ p_m$. Exprimer l'endomorphisme $p_m \circ v$ en fonction de u.

3. Soit $X \in \operatorname{Im} v$ fixé.

3.1 Déterminer en fonction de X, une constante positive K telle que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $||p_m(X)|| \leqslant \dfrac{K}{m}(1 + |||u^m|||)$.

3.2 En déduire que la suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

4. Montrer alors que la somme $H = \ker v + \operatorname{Im} v$ est directe c'est-à-dire que $H = \ker v \bigoplus \operatorname{Im} v$.

5. Préciser H.

6. Prouver alors que la suite $(p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur E vers le projecteur p sur $\ker v$ parallèlement à $\operatorname{Im} v$.

Partie 4.

On suppose dans cette partie que E est de dimension infinie. Soit u un endomorphisme continu de E tel que $|||\, u \,||| \leqslant 1$.

On garde les notations définies dans la partie 3.

1. La suite des itérés de u : $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

2. Prouver que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $|||p_m||| \leqslant 1$.

3. On note $\overline{\operatorname{Im} v}$ l'adhérence de $\operatorname{Im} v$ et on prend $X \in \overline{\operatorname{Im} v}$.

3.1 Prouver que pour tout entier naturel m non nul, il existe $T \in \operatorname{Im}(v)$ tel que :

$$||p_m(X)|| \leqslant |||p_m|||\,.\,||X - T|| \,+\, ||p_m(T)||$$

3.2 Démontrer que la suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

4. Prouver que la somme $H = \ker(v) + \overline{\operatorname{Im} v}$ est directe.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

5.1 Démontrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im}(v)$ est stable par p_m.

5.2 En déduire que $\overline{\operatorname{Im} v}$ est aussi stable par p_m.

5.3 Prouver enfin que H est stable par p_m.

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note π_m la restriction de p_m à H et π le projecteur de H sur $\ker(v)$ parallèlement à $\overline{\operatorname{Im} v}$.

6.1 Prouver que la suite (p_m) converge simplement sur H vers π.

6.2 Vérifier que $\forall\, X \in H$, $||\pi(X)|| \leqslant ||X||$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

6.3 En déduire que $\pi \in \mathcal{L}_C(E)$.

Partie 5.

On prend dans cette partie pour E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées que l'on munit de la norme :

$$\forall X \in E\,, ||X|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

On considère alors l'application u de E qui à la suite $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1}$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2. Prouver que $|||u||| = 1$.

3. Préciser $\ker(v)$ où $v = id_E - u$.

4. Montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est constitué des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la suite $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

soit bornée.

5. Peut-on construire un exemple tel que $X \in E$ et la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}}$ diverge ?

FIN DE L'EPREUVE.