

A. Décomposition de Dunford.

- 1) Conséquence du théorème de Cayley-Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux. \square
- 2) Chaque sous-espace F_i étant stable par f , on a classiquement $P = Q_1 Q_2 \dots Q_r$ en notant Q_i le polynôme caractéristique de f_i . Par ailleurs pour tout $x \in F_i$ on a $P_i(f_i)(x) = (f_i - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}(x) = (f - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}(x)$ puisque $f_i^k(x) = f^k(x)$ pour tout entier k . Donc $P_i(f_i)(x) = 0$ et ainsi P_i est un polynôme annulateur de f_i . Il en découle que les valeurs propres de f_i sont à rechercher parmi les racines de P_i donc α_i est la seule valeur propre de f_i donc il existe $\beta_i \in \mathbb{N}$ tel que $Q_i = (X - \alpha_i)^{\beta_i}$. Ainsi $P = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{\beta_i}$ et l'unicité de la décomposition de P en facteurs premiers montre que $\beta_i = \alpha_i$ c'est à dire que $Q_i = P_i$. \square
- 3) Le polynôme caractéristique P_i de f_i étant scindé, f_i est trigonalisable donc il existe une base \mathcal{B}_i de F_i telle que la matrice de f_i dans cette base soit de la forme $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure à diagonale nulle. Classiquement $N_i^{\alpha_i} = 0$ car à chaque nouvelle multiplication par N_i on "gagne" une colonne nulle supplémentaire. Ainsi N_i est nilpotente (d'indice au plus α_i). Dans la base \mathcal{B} de \mathbb{C}^n obtenue par concaténation des bases \mathcal{B}_i la matrice de f est A' ayant la forme requise. \square
- 4) Notons N' la matrice triangulaire supérieure $\text{diag}(N_1, N_2, \dots, N_r)$ et D' la matrice diagonale $A' - N'$. Par produit par blocs (bien licite) il vient $N'^k = \text{diag}(N_1^k, N_2^k, \dots, N_r^k)$ donc $N'^\alpha = 0$ avec $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. Par ailleurs toujours par produit par blocs il vient :
 $D'N' = \text{diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1} \cdot N_1, \lambda_2 I_{\alpha_2} \cdot N_2, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r} \cdot N_r) = \text{diag}(N_1 \cdot \lambda_1 I_{\alpha_1}, N_2 \cdot \lambda_2 I_{\alpha_2}, \dots, N_r \cdot \lambda_r I_{\alpha_r}) = N'D'$.
 Il en résulte que $A = D + N$ avec $D = PD'P^{-1}$ et $N = PN'P^{-1}$. D est diagonalisable car semblable à D' diagonale, N est nilpotente car semblable à N' nilpotente et $DN = PD'N'P^{-1} = PN'D'P^{-1} = ND$. \square
- 5) En faisant la somme des deux premières colonnes de A on voit que 2 est valeur propre et $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ vecteur propre associé. De même 1 est valeur propre et $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$ vecteur propre associé. Le spectre de A est donc $(1, 2, \lambda)$ et la considération de l'invariant trace montre alors que $\lambda = 2$.
 Le calcul de $(A - 2I)^2$ montre immédiatement que F_2 est le plan d'équation $x - y = 0$ (qui contient bien ε_2). Il contient également e_3 dont l'image est $\varepsilon_2 + 2e_3$. Donc en posant $\varepsilon_3 = e_3$, il vient que la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D' + N'$ avec $D' = \text{diag}(1, 2, 2)$.

La décomposition de Dunford de A est donc $A = D + N$ avec $D = PD'P^{-1}$, $N = PN'P^{-1}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \square$

B. Commutation et conjugaison.

- 6) Il vient pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en notant $\varphi_{P,A}$ l'application proposée :
 $\varphi_{P,A}(M) = P^{-1}(A(PMP^{-1}) - (PMP^{-1})A)P = (P^{-1}AP)M - M(P^{-1}AP)$ donc :
 $\varphi_{P,A} = \text{comm}_{P^{-1}AP} = \text{comm}_{\text{conj}_P(A)}$. \square
- 7) En remarquant que $E_{i,j}E_{r,s} = \delta_{j,r}E_{i,s}$ et en notant $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ il vient :
 $\text{comm}_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k} E_{i,j} - \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{i,j} E_{k,k} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$.
 Donc si $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ alors la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une base de vecteurs propres de comm_A qui est donc diagonalisable et dont l'ensemble des valeurs propres est $\{\lambda_i - \lambda_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$. \square
- 8) Soit A diagonalisable et P telle que $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
 En remarquant que conj_P est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $(\text{conj}_P)^{-1} = \text{conj}_{P^{-1}}$, la question 6) montre que conj_A et conj_D sont deux endomorphismes conjugués de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 Il en découle alors de la question précédente que comm_A est diagonalisable avec pour ensemble de valeurs propres $\{\lambda_i - \lambda_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$ et que l'image par conj_P de la base canonique est une base de vecteurs propres. \square
- 9) Montrons par récurrence sur l'entier k que $(\text{comm}_A)^m(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k A^{m-k} M A^k$.
 Ce prédicat est vrai pour $k = 1$ et en supposant qu'il soit vrai au rang $m \geq 1$ il vient :

$$\begin{aligned}
(\text{comm}_A)^{m+1} &= \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k A^{m+1-k} M A^k - \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k A^{m-k} M A^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k A^{m+1-k} M A^k + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k C_{m-1}^{k-1} A^{m+1-k} M A^k \\
&= A^{m+1} M + \sum_{k=1}^m (-1)^k C_{m+1}^k A^{m+1-k} M A^k + (-1)^{m+1} M^{m+1} A \quad \text{en vertu de la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k A^{m+1-k} M A^k
\end{aligned}$$

ce qui établit la validité du prédicat pour tout entier m .

Il en découle que si A est nilpotente d'indice p alors $(\text{comm}_A)^{2p} \equiv 0$. \square

- 10) Dire que $\text{comm}_A \equiv 0$ revient à dire que A commute avec toute matrice. En particulier pour $1 \leq r \leq n$ quelconque $A E_{r,r} = E_{r,r} A$ donc $\sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j} E_{r,r} = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{r,r} E_{i,j}$ soit $\sum_i a_{i,r} E_{i,r} = \sum_j a_{r,j} E_{r,j}$ donc, par unicité de la

décomposition sur la base canonique, $a_{i,r} = a_{r,i} = 0$ si $i \neq r$.

Ce qui prouve que A est diagonale puisque r est quelconque.

Comme en outre A est nilpotente, elle est donc nulle. \square

- 11) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A . Il est immédiat que $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$. En outre comm_D est diagonalisable par la question 8) et comm_N est nilpotent par la question 9).

Par ailleurs $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N(X) = DNX - DXN - NXD + XND$ quantité symétrique en D et N puisque N et D commutent.

Ce qui finit d'établir que $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$ est la décomposition de Dunford de comm_A . \square

Si comm_A est diagonalisable, la composante nilpotente de sa décomposition de Dunford est nulle c'est à dire $\text{comm}_N = 0$ d'après ce qui précède. La question 10) montre alors que $N = 0$ c'est à dire que A est diagonalisable. La réciproque a été établie à la question 8).

En conclusion une matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme comm_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'est. \square

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe.

- 12) Si u est diagonalisable il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ dans laquelle sa matrice est $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r = \text{rg}(u)$.

Dans cette base la matrice de u^2 est $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)$ avec $\mu_i = \lambda_i^2 \neq 0$ ce qui prouve que

$\text{Ker } u^2 = \text{vect}(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p) = \text{Ker } u$. \square

Supposons désormais $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ et soit $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$. Comme $x \in \text{Im } u$, il existe y tel que $x = u(y)$. Comme $x \in \text{Ker } u$ il vient $u^2(y) = 0$ donc $y \in \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ donc $y \in \text{Ker } u$ et ainsi $x = u(y) = 0$. \square

- 13) Soit une famille $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ telle que $\sum_{k=1}^q \lambda_k \varphi_k \equiv 0$. Il vient alors pour tout $x \in E$ que $\sum_{k=1}^q \lambda_k \varphi_k(x) = 0$

soit $\sum_{k=1}^q \lambda_k b(\varepsilon_k, x) = 0$ soit encore par bilinéarité $b(\sum_{k=1}^q \lambda_k \varepsilon_k, x) = 0$.

Ainsi $\sum_{k=1}^q \lambda_k \varepsilon_k$ est nul en tant qu'élément de $E^{\perp b}$ donc tous les λ_k sont nuls car la famille $(\varepsilon_k)_{k=1..q}$ est libre. \square

- 14) $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ appartient à $F^{\perp b}$ si et seulement si $b(x, \varepsilon_i) = 0$ pour i de 1 à q par bilinéarité de b .

Or $b(x, \varepsilon_i) = \sum_{k=1}^p x_k b(e_k, \varepsilon_i) = \sum_{k=1}^p x_k \varphi_i(e_k) = x_k \delta_{i,k}$ puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est la base duale de (e_1, e_2, \dots, e_p) .

Ainsi $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ appartient à $F^{\perp b}$ si et seulement si $x_k = 0$ pour k de 1 à q .

En d'autres termes $F^{\perp b} = \text{vect}(e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p)$ et donc $\dim F + \dim F^{\perp b} = p$. \square

D. Critère de Klars.

- 15) φ est clairement bilinéaire et classiquement $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc φ est symétrique.

En outre si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\perp \varphi}$ il vient $\text{tr}(E_{i,j} A) = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or $E_{i,j} A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne d'indice i qui est égale à la ligne d'indice j de A . Donc $\text{tr}(E_{i,j} A) = a_{j,i}$ et ainsi $a_{i,j} = 0$ donc A est la matrice nulle et ainsi φ est bien non dégénérée. \square

16. D'après la question 14) on a : $\dim(\text{Ker } \text{comm}_A^{\perp \varphi}) = n^2 - \dim(\text{Ker } \text{comm}_A) = \dim(\text{Im } \text{comm}_A)$ par le théorème du rang.

En outre soient $M \in \text{Im } \text{comm}_A$ et $N \in \text{Ker } \text{comm}_A$. Alors il existe B telle que $M = AB - BA$ et $AN - NA = 0$.

donc $\varphi(M, N) = \text{tr}(MN) = \text{tr}(ABN - BAN) = \text{tr}(ABN - BNA) = \text{tr}(ABN) - \text{tr}(BN.A) = \text{tr}(ABN) - \text{tr}(A.BN)$
 ainsi $\varphi(M, N) = 0$ ce qui prouve que $\text{Im comm}_A \subset (\text{Ker comm}_A)^{\perp\varphi}$.

Compte tenu de l'égalité des dimensions on a bien $\text{Im comm}_A = (\text{Ker comm}_A)^{\perp\varphi}$. \square

17) Soit A nilpotente et soit N une matrice quelconque de Ker comm_A i.e. telle que $AN = NA$. Il vient alors puisque A et N commutent que $(AN)^k = A^k N^k$ de sorte que AN est nilpotente puisque A l'est. Ainsi toutes les valeurs propres de AN sont nulles et donc $\varphi(A, N) = \text{tr}(AN) = 0$. Donc $A \in (\text{Ker comm}_A)^{\perp\varphi}$.

La question précédente prouve alors que $A \in \text{Im comm}_A$. \square

Il vient immédiatement $\text{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = \text{comm}_A(X) \quad \forall (\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. \square

18) En reprenant les notations des question 3) et 4) :

Comme N_i est nilpotente, il existe $X_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ telle que $\text{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$.

Soit alors X' la matrice diagonale par blocs $\text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_r)$.

Par produit par blocs (bien licite ici) il vient $\text{comm}_{A'}(X') = \text{diag}(N_1, N_2, \dots, N_r) \stackrel{\text{DEF}}{=} N'$.

Donc $(P^{-1}AP)X' - X'(P^{-1}AP) = N'$ d'où $A(PX'P^{-1}) - (PX'P^{-1})A = PN'P^{-1}$.

Or $PN'P^{-1} = N$ (question 4) donc $\text{comm}_A(X) = N$ avec $X \stackrel{\text{DEF}}{=} PX'P^{-1}$. \square

19) Si A est diagonalisable alors comm_A est diagonalisable par la partie B. La question 12) montre alors que $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2)$.

Si $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2)$ alors $\text{Ker}(\text{comm}_A) \cap \text{Im}(\text{comm}_A) = \{0\}$ toujours par la question 12).

Or $N \in \text{Im}(\text{comm}_A)$ par la question 18).

Mais on a également $N \in \text{Ker}(\text{comm}_A)$: en effet $AN - NA = (D + N)N - N(D + N) = DN - ND = 0$ puisque D et N commutent dans la décomposition de Dunford.

Il en résulte que $N = 0$ donc que $A = D$ donc que A est diagonalisable.

Le critère de diagonalisation de Klares est ainsi établi. \square

————— FIN —————