

CONCOURS

SESSION 1993

EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS
PH-M

COMMUNS

MATHEMATIQUES 2

POLYTECHNIQUES

Durée : 4 h 00

Préambule

Ce problème est consacré à l'étude des solutions de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, (\mathcal{E}_1) et (\mathcal{E}_2) :

$$(\mathcal{E}_1) : \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

et

$$(\mathcal{E}_2) : \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

La première est l'équation des cordes vibrantes ; la deuxième est l'équation de la chaleur, ou équation de Helmholtz.

Dans chacun des deux cas, il s'agit de trouver une solution $U : (x, t) \rightarrow U(x, t)$ de l'équation concernée dans un domaine D de \mathbb{R}^2 à préciser, satisfaisant à certaines conditions initiales et, éventuellement, à certaines conditions aux limites.

PREMIERE PARTIE

Etude de deux exemples simples

Cette partie fait découvrir, sur des exemples simples, deux types de problèmes dont l'étude dans le cas général fera l'objet des parties suivantes.

1/ A tout p de \mathbb{N} , on associe la fonction g_p définie sur \mathbb{R} par :

$$g_p(x) = (\sin x)^{2p+1}$$

et la fonction G_p des deux variables réelles x et t définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$G_p(x, t) = \frac{1}{2} (g_p(x+t) + g_p(x-t))$$

1-a Etablir que la fonction G_p est solution sur \mathbb{R}^2 de l'équation (E_1) , qu'elle satisfait aux conditions initiales :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} G_p(x, 0) = g_p(x) \\ \frac{\partial G_p}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

et qu'elle vérifie, en outre, les relations :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_p(0, t) = G_p(\pi, t) = 0 \\ 2) \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_p(x, \pi - t) = -G_p(x, t) \end{aligned}$$

1-b On considère les fonctions suivantes :

$x \rightarrow G_p(x, t)$, où t est fixé dans \mathbb{R} ,

et

$t \rightarrow G_p(x, t)$, où x est fixé dans \mathbb{R} .

Etudier les périodicités de ces fonctions et les symétries de leurs représentations graphiques.

2-a Dans le cas particulier où $p = 1$, donner la valeur explicite de $G_1(x, \frac{\pi}{6})$ en fonction de x . Etudier les variations des deux fonctions : $x \rightarrow G_1(x, 0)$ et $x \rightarrow G_1(x, \frac{\pi}{6})$ lorsque x parcourt $[0, \pi]$, et tracer sur un même graphique leurs courbes représentatives (on prendra comme unité 5 cm sur chacun des deux axes $x'Ox, y'Oy$ de repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$).

2-b Utilisant les propriétés de symétrie mises en évidence dans 1-a, tracer sur le graphique précédent les courbes représentatives des fonctions $x \rightarrow G_1(x, t)$ correspondant aux valeurs suivantes de t :

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{5\pi}{6}, \quad t = \pi.$$

3-a Montrer que $g_p(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$g_p(x) = \sum_{k=0}^p \beta_{2k+1} \sin(2k+1)x,$$

et donner, pour tout entier k inférieur ou égal à p , la valeur de β_{2k+1} .

3-b Montrer que l'expression précédente fournit le développement de Fourier de g_p , et en déduire, pour tout couple (p, n) d'entiers naturels, la valeur de l'intégrale :

$$I_{p, n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x)^{2p+1} \sin nx \, dx$$

4 Soit, pour tout p de \mathbb{N} , la fonction Γ_p des deux variables réelles x et t définie sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ par :

$$\Gamma_p(x, t) = \sum_{k=0}^p \beta_{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x,$$

où les β_{2k+1} sont les coefficients calculés dans I-3.

Vérifier que Γ_p est solution de (\mathcal{E}_2) sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}$, et qu'elle satisfait aux conditions :

$$\Gamma_p(x, 0) = g_p(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } [0, \pi]$$

$$\Gamma_p(0, t) = \Gamma_p(\pi, t) = 0, \text{ pour tout } t \text{ réel.}$$

DEUXIEME PARTIE

Problèmes relatifs à l'équation (\mathcal{E}_1)

Le premier problème traité dans cette partie consiste à chercher la solution de (\mathcal{E}_1) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 satisfaisant pour tout x de \mathbb{R} , aux conditions initiales :

$$(J_1(\psi)) : \begin{cases} U(x, 0) = \psi(x) \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

où ψ est une fonction définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Ce problème sera désigné par la notation : $\mathcal{P}(\psi)^{(1)}$

h étant un réel donné, strictement positif, et φ une fonction donnée, définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, h]$, avec $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, le deuxième problème, noté $\mathcal{P}(h, \varphi)$ est la recherche d'une fonction U de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 solution de (\mathcal{E}_1) sur $[0, h] \times \mathbb{R}$, satisfaisant, pour tout x de $[0, h]$ aux conditions $(J_1(h, \varphi))$:

$$(J_1(h, \varphi)) : \begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

et vérifiant, en outre, pour tout t réel, les conditions (\mathcal{L}_1)

$$(\mathcal{L}_1) : U(0, t) = U(h, t) = 0$$

(1) La solution U du problème $\mathcal{P}(\psi)$ est telle que la fonction $x \rightarrow U(x, t)$ représente, pour tout $t \geq 0$, le profil à l'instant t d'une corde de longueur infinie, parfaitement élastique, s'identifiant, au repos, avec l'axe $x'Ox$, déformée à l'instant $t = 0$, son profil initial étant décrit par la fonction $x \rightarrow \psi(x)$ et abandonnée à elle-même sans vitesse initiale. L'étude montrera que l'évolution de ce profil dans le temps correspond à un phénomène de propagation.

1/ Ensemble des solutions de (\mathcal{E}_1) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

1-a Soit L , la bijection de $\mathbb{R}^2 : (x, t) \rightarrow (\xi, \theta)$ définie par :

$$\begin{cases} \xi = x - t \\ \theta = x + t \end{cases}$$

A quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire la fonction V de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 pour que la fonction composée $U = V \circ L$ soit solution de (\mathcal{E}_1) sur \mathbb{R}^2 ?

1-b Montrer que l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_1) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 est décrit par la formule :

$$U(x, t) = F(x - t) + G(x + t),$$

où F et G sont deux fonctions arbitraires de classes \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

2/ Résolution du problème $\mathcal{P}(\psi)$

Etablir l'existence et l'unicité de la fonction U de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , solution du problème $\mathcal{P}(\psi)$ formulé au début de la deuxième partie, et donner l'expression de $U(x, t)$ pour tout (x, t) de \mathbb{R}^2 .

3/ Résolution du problème $\mathcal{P}(h, \varphi)^{(2)}$

3-a φ étant de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, h]$ avec $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, montrer qu'il existe une infinité de fonctions $\tilde{\varphi}$ de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telles que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout x de $[0, h]$.

3-b Soit $\tilde{\varphi}$ une telle fonction. On désigne par \tilde{U} la solution du problème $\mathcal{P}(\tilde{\varphi})$.

Montrer que la restriction de \tilde{U} à $[0, h] \times \mathbb{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}(h, \varphi)$ si et seulement si $\tilde{\varphi}$ est une fonction $2h$ -périodique impaire.

3-c Montrer qu'il existe une fonction unique, notée $\hat{\varphi}$ qui soit $2h$ -périodique impaire et telle que $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout x de $[0, h]$.

3-d Quelle est la classe de $\hat{\varphi}$ dans le cas général ? Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur $\varphi''(0)$ et $\varphi''(h)$ pour que $\hat{\varphi}$ soit de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ?

3-e On suppose que φ vérifie cette condition supplémentaire. Déterminer alors une solution $U : (x, t) \rightarrow U(x, t)$ du problème $\mathcal{P}(h, \varphi)$. Vérifier que, pour tout x de $[0, h]$, la fonction $t \rightarrow U(x, t)$ est $2h$ -périodique.

(2) La solution U , cherchée est la fonction telle que pour tout $t \geq 0$, $x \rightarrow U(x, t)$ représente le profil à l'instant $t \geq 0$ d'une corde de longueur finie h , s'identifiant au repos, au segment $[0, h]$ de l'axe $x'Ox$, dont le profil initial est décrit par la fonction $x \rightarrow \varphi(x)$ et abandonnée à elle-même sans vitesse initiale, tout en restant fixée par ses extrémités. La conclusion de l'étude montrera que le mouvement de la corde est un mouvement vibratoire.

TROISIEME PARTIE

Problème relatif à l'équation (\mathcal{E}_2)

Les notations h et φ ayant la même signification que dans la partie II, on se propose de trouver une fonction U des deux variables réelles x et t définie, et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , solution de l'équation (\mathcal{E}_2) sur $[0, h] \times \mathbb{R}$ satisfaisant, pour tout $x \in [0, h]$ la condition :

$$J_2(h, \varphi) : U(x, 0) = \varphi(x),$$

en vérifiant, en outre, pour tout t de \mathbb{R}^* , la condition :

$$L_2(h) : U(0, t) = U(h, t) = 0$$

Ce problème sera désigné par la notation : $Q(h, \varphi)^{(3)}$.

1/ Séparation de variables

Dans cette question, on cherche des fonctions U , solutions de (\mathcal{E}_2), qui soient du type :

$$(x, t) \rightarrow U(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

où X est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , et T une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

1-a Montrer que le produit $X.T$ de deux telles fonctions satisfait à (\mathcal{E}_2) si et seulement si X est solution d'une équation différentielle du second ordre et T solution d'une équation différentielle du premier ordre, ces équations faisant intervenir un paramètre λ .

1-b En étudiant, dans les différents cas la limite de T en $+\infty$, montrer que, si cette limite est non nulle, la seule fonction $U = X.T$ qui soit solution de (\mathcal{E}_2) et vérifie (L_2) est la fonction identiquement nulle.

1-c Montrer que les seules fonctions $U = X.T$ non nulles qui sont solutions de (\mathcal{E}_2) et vérifient (L_2) sont des fonctions proportionnelles aux fonctions \tilde{U}_n définies par :

$$\tilde{U}_n(x, t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{h^2}t\right) \sin\frac{n\pi}{h}x,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Ce problème décrit l'évolution dans le temps de la température $U(x, t)$ en tout point x d'une barre s'identifiant à l'intervalle $[0, h]$ de \mathbb{R} , sans apport de chaleur extérieure, la température initiale en ce point étant égale à $\varphi(x)$.

2/ Superposition des solutions précédentes

2-a Développement de la fonction φ .

Comme dans la deuxième partie, $\hat{\varphi}$ désigne la fonction $2h$ -périodique impaire, vérifiant, pour tout x de $[0, h]$, l'égalité : $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$. On supposera que φ remplit la condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{\varphi}$ soit de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ de réels tels que, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{h} x$$

Exprimer les b_n à l'aide d'intégrales portant sur φ .

Dans la suite, on pose, quel que soit N dans \mathbb{N}^* :

$$\sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi}{h} x = \varphi_N(x)$$

2-b Solution du problème $Q(h, \varphi_N)$: Déterminer les nombres α_n (n entier vérifiant $1 \leq n \leq N$) tels que $U_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n \tilde{U}_n$ soit solution de $Q(h, \varphi_N)$.

Montrer que, lorsque N tend vers l'infini, la suite (U_N) converge uniformément sur $[0, h] \times [0, +\infty[$ vers une fonction U qui apparaîtra comme somme de série.

2-c Etude de cette fonction U .

En utilisant les propriétés de convergence uniforme des séries obtenues par dérivation terme à terme dans un domaine $[0, h] \times [a, +\infty[$, où a est strictement positif, montrer que la fonction U obtenue ci-dessus est solution de (E_2) sur $[0, h] \times]0, +\infty[$.

2-d Dans l'hypothèse où φ est de classe C^4 sur $[0, h]$, démontrer qu'il existe un réel strictement positif A tel que l'on ait, pour tout entier $n \geq 1$:

$$|b_n| \leq \frac{A}{n^4}.$$

En déduire que la fonction U est alors solution du problème $Q(h, \varphi)$.

Fin de l'énoncé