Corrigé Mines 2 PSI 2017

Partie A

Question 1

Comme $-u$ est semblable à u, il existe un automorphisme φ de E de sorte que $-u = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$.
Par propriété de la trace, $\mathrm{Tr}\left(\varphi^{-1} \circ (u \circ \varphi)\right) = \mathrm{Tr}\left((u \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(u)$, donc $\mathrm{Tr}(-u) = \mathrm{Tr}(u)$.
Alors, par linéarité de la trace, $-\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u)$, donc $2\mathrm{Tr}(u) = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = 0}$.

Question 2

Je propose une solution "terre à terre". Il en est de plus élégantes, par exemple en s'intéressant dès le début au polynôme caractéristique de u.

- Fixons a $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
  En tenant compte du résultat de la question 1, la matrice M de u relativement à $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
  Il vient alors : $M^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{bmatrix} = -\mathrm{dét}(u)\, I_2 = \delta^2 I_2$.
  Ainsi, $\boxed{u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E}$.

- Le polynôme caractéristique de u est alors défini par :
  $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_u(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 - \delta^2.$
  Comme δ est non nul, χ_u possède exactement deux racines : δ et $-\delta$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{-\delta, \delta\}}$.
  Alors u est un endomorphisme d'un plan vectoriel qui possède exactement deux valeurs propres : il est donc diagonalisable, et ses espaces propres sont de dimension 1.

Question 3

- Considérons e_+ (respectivement e_-) un vecteur propre de u pour la valeur propre δ (respectivement $-\delta$).
  En particulier, $\mathscr{B} = (e_+, e_-)$ est une base de E.
  Alors, $f = e_+ + e_-$ vérifie $u(f) = \delta e_+ - \delta e_-$, donc $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(f, u(f)) = \begin{vmatrix} 1 & \delta \\ 1 & -\delta \end{vmatrix} = -2\delta$, ce qui est non nul.
  Ainsi, l'image par u de la droite vectorielle D dirigée par f est une droite vectorielle D' autre que D, donc non contenue dans D.

- D et D' sont alors deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel E : ce sont donc deux sous-espaces vectoriels suppémentaires de E.
  Par définition, $D' = u(D)$, et $u(D') = u^2(D)$.
  Or u^2 est une homothétie de rapport non nul, donc $u^2(D) = D$, donc $u(D') = D$.
  Ainsi, $E = D \oplus D'$, $u(D) \subset D'$ et $u(D') \subset D$, donc $\boxed{u \text{ est un échangeur}}$.

Partie B

Question 4

- Les formats des blocs qui constituent M permettent d'effectuer le produit par blocs :
$\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0_n^2 + B0_{n,p} & 0_nB + B0_p \\ 0_{n,p}0_n + 0_p0_{n,p} & 0_{n,p}B + 0_p^2 \end{bmatrix} = 0_{n+p}$.

- De même, $\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix}^2 = 0_{n+p}$.
Or $M = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix}$,
donc $\boxed{M \text{ est la somme de deux matrices de carré nul}}$.

Question 5

- On voit de suite que $D^2 = \mathrm{I}_{n+p}$, donc D est inversible, et égale à son inverse.

- On effectue le produit par blocs (licite!) $DM = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{bmatrix}$,
puis le produit par blocs $(DM)\,D = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{bmatrix} = -M$.
Ainsi, $DMD^{-1} = -M$, donc $\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$.

Question 6

Les images par u de $f_1, \cdots, f_n$ sont combinaisons linéaires de $g_1, \cdots, g_p$ et celles de $g_1, \cdots, g_p$ sont combinaisons linéaires de $f_1, \cdots, f_n$, donc la matrice de u relativement à $\mathbf{B}$ est de la forme de la matrice M de l'énoncé.

Question 7

Soit u un endomorphisme de E pour lequel existent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de sorte que $u\,(F) \subset G$ et $u\,(G) \subset F$.

- Si F est nul, alors $G = E$.
Or $u\,(G) \subset F$, donc u est l'endomorphisme nul.
Il suffit alors de choisir $a = b = 0_{L(E)}$ pour que a et b soient de carrés nuls et de somme u.
Et alors $u = -u = \mathrm{I}_E \circ (-u) \circ (\mathrm{I}_E)^{-1}$, donc u et $-u$ sont bien semblables.
A échange près de F et G, c'est la même chose lorsque G est nul.

- On suppose maintenant F et G tous deux non nuls, on construit la base $\mathbf{B}$ comme dans Q6.
$M_{\mathbf{B}}\,(u)$ s'écrit sous la forme $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}$, avec $n = \dim(F)$, $p = \dim(G)$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$.
On définit alors b, a et s comme les endomorphismes de matrices respectives $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{bmatrix}$ relativement à $\mathbf{B}$.
Les calculs effectués dans Q5 permettent alors d'affirmer :

- d'une part que a et b sont de carrés nuls et de somme u
- d'autre part que s est un automorphisme de E égal à sa réciproque, et que $s \circ u \circ s^{-1} = -u$. Par conséquent, les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

- Ainsi, $\boxed{\text{tout endomorphisme de } E \text{ qui vérifie } (C1) \text{ vérifie aussi } (C2) \text{ et } (C3)}$.

Partie C

Question 8

- Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$.
  Il existe $x \in E$ de sorte que $y = f\,(x)$.
  Or f^2 est nul, donc $f\,(y) = f^2\,(x)$ est nul.
  Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)}$.

- Le théorème du rang donne : $\dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Im}\,(f))$.
  Mais, en conséquence de l'inclusion précédente, $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f))$,
  donc $2\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) \geqslant \dim\,(E)$, donc $\boxed{\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) \geqslant \dfrac{\dim\,(E)}{2}}$.

Question 9

- Si $x \in \mathrm{Ker}\,(a) \cap \mathrm{Ker}\,(b)$, alors $u\,(x) = a\,(x) + b\,(x)$ est nul.
  Or u est un automorphisme de E, donc est de noyau nul, donc x est nul.
  Ainsi,$\mathrm{Ker}\,(a) \cap \mathrm{Ker}\,(b) = \{0_E\}$.

- Ce qui précède prouve que $\mathrm{Ker}\,(a)$ et $\mathrm{Ker}\,(b)$ sont en somme directe, donc $\mathrm{Ker}\,(a) + \mathrm{Ker}\,(b)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b))$,
  donc $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) \leqslant \dim\,(E)$.
  D'autre part, a et b sont de carrés nuls, donc, d'après l'inégalité de la question précédente, $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) \geqslant \dim\,(E)$.

- Finalement, $\mathrm{Ker}\,(a) \cap \mathrm{Ker}\,(b) = \{0_E\}$ et $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) = \dim\,(E)$,
  donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(a) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(b) \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires de } E}$.

- Comme $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) \geqslant \dfrac{\dim\,(E)}{2}$, $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) \geqslant \dfrac{\dim\,(E)}{2}$,
  et $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) = \dim\,(E)$,
  $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(a)) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(b)) = \dfrac{\dim\,(E)}{2}$, et, au passage, la dimension de E est paire.
  Le théorème du rang donne alors aussi : $\dim\,(\mathrm{Im}\,(a)) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(b)) = \dfrac{\dim\,(E)}{2}$.
  Ainsi, d'après l'inclusion vue en Q8, $\mathrm{Im}\,(a) \subset \mathrm{Ker}\,(a)$ et $\dim\,(\mathrm{Im}\,(a)) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(a))$, donc $\boxed{\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Ker}\,(a)}$.
  C'est la même chose pour b.

Question 10

- Montrons que $u\,(\mathrm{Ker}\,(a)) \subset \mathrm{Ker}\,(b)$.
  Soit $y \in u\,(\mathrm{Ker}\,(a))$.

Il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(a)$ tel que $y = u\,(x) = (a+b)\,(x)$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}\,(a)$, $y = b\,(x)$, donc $b\,(y) = b^2\,(x)$.
Or b^2 est nul, donc $y \in \mathrm{Ker}\,(b)$.

- Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(a)$ et $\mathrm{Ker}\,(b)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E, $u\,(\mathrm{Ker}\,(a)) \subset \mathrm{Ker}\,(b)$, et, de même, $u\,(\mathrm{Ker}\,(b)) \subset \mathrm{Ker}\,(a)$.
  On a donc prouvé que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme échangeur}}$.

Partie D

Question 11

Si $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{Ker}\left(v^k\right)$, alors $v^{k+1}\,(x) = v\left(v^k\,(x)\right) = v\,(0_E) = 0_E$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\left(v^k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(v^{k+1}\right)$,
donc $\boxed{\text{la suite } \left(\mathrm{Ker}\left(v^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion}}$.

Question 12

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\left(v^k\right)$ est un sous-espace vectoriel de E, donc sa dimension est inférieure ou égale à celle de E.
Ainsi, $\left\{\dim\left(\mathrm{Ker}\left(v^k\right)\right), \text{ où } k \in \mathbb{N}\right\}$ est un ensemble d'entiers non vide et majoré, donc admet un plus grand élément p_1.
Pour tout $k \geqslant p_1$, il vient alors $\mathrm{Ker}\,(v^{p_1}) \subset \mathrm{Ker}\left(v^k\right)$ d'après Q11, et $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(v^k\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v^{p_1})\right)$, donc $\mathrm{Ker}\,(v^{p_1}) = \mathrm{Ker}\left(v^k\right)$.
On définit alors p par : $p = p_1$ ou $p = p_1 + 1$ suivant que l'entier p_1 est pair ou impair, si bien que :
$\boxed{p \text{ est pair et, pour tout } k \geqslant p,\ \mathrm{Ker}\,(v^p) = \mathrm{Ker}\left(v^k\right)}$.
L'utilité de choisir p pair apparaîtra à la question 17.

Question 13

- $\mathrm{Ker}\,(v^{2p}) \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{Ker}\left(v^k\right)\right)$ et, d'après Q11, $\mathrm{Ker}\,(v^p) \subset \mathrm{Ker}\,(v^{2p})$, donc, par double inclusion, $\boxed{E_\lambda^c\,(f) = \mathrm{Ker}\,(v^{2p})}$.

-
  - Comme $E_\lambda^c\,(f) = \mathrm{Ker}\,(v^p)$, d'après la formule du rang,
    $\dim\,(E) = \dim\,(E_\lambda^c\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Im}\,(v^p))$.
  - D'autre part, si $y \in \mathrm{Im}\,(v^p) \cap \mathrm{Ker}\,(v^p)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = v^p\,(x)$, et $v^p\,(y) = 0_E$.
    Ainsi, $v^{2p}\,(x) = 0_E$, donc, d'après le point précédent, x appartient aussi à $\mathrm{Ker}\,(v^p)$, donc $y = 0_E$.
  - par conséquent, $\boxed{E = E_\lambda^c\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(v^p)}$.

- $v^p = (f - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ est un polynôme en f, donc commute avec f , donc
  $\boxed{\mathrm{Ker}\,(v^p) = E_\lambda^c\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(v^p) \text{ sont stables par } f}$.

Question 14

- Soit $y \in \mathrm{Im}\,(v^p)$ pour lequel $(f - \lambda \mathrm{I}_E)\,(y) = v\,(y) = 0_E$.
  Comme $y \in \mathrm{Im}\,(v^p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v^p\,(x)$, donc $v^{p+1}\,(x) = 0_E$.

Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(v^{p+1})$, donc, par définition de p, $x \in \operatorname{Ker}(v^p)$, donc $y = 0_E$.
Un vecteur propre étant par définition non nul, il n'y a pas dans $\operatorname{Im}(v^p)$ de vecteur propre de f pour λ, qui n'est donc pas une valeur propre de l'endomorphisme de $\operatorname{Im}(v^p)$ induit par f .

- On suppose $E^c_\lambda(f)$ non nul.
  Par définition de $E^c_\lambda(f)$, $(X-\lambda)^p$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme g de $E^c_\lambda(f)$ induit par f.
  Or toute valeur propre de g est racine de tout polynôme annulateur de g, donc λ est la seule valeur propre possible de g.
  Mais d'autre part tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe non nul de dimension finie possède au moins une valeur propre,
  donc $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } g\text{, et c'est la seule}}$.

Question 15

Cette question est bien compliquée, car il s'agit de rester dans le cadre du programme de PSI.

- f est un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe non nul de dimension finie, donc son polynôme caractéristique est scindé, donc, ici, f possède ou bien une ou bien deux valeurs propres.

- Lorsque f possède une seule valeur propre λ, son polynôme caractéristique est donc $(X-\lambda)^{\dim(E)}$.
  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de E,
  donc $\left(\operatorname{Ker}\left((u-\lambda \mathrm{I}_E)^{\dim(E)}\right)\right) = E$, donc $E^c_\lambda(f) = E$.
  Si μ est un complexe autre que λ, ce n'est pas una valeur propre de E, donc $u - \mu \mathrm{I}_E$ est un automorphisme de E, ainsi que toutes ses puissances, donc $E^c_\mu(f) = \{0_E\}$.
  Dans ce cas, il est donc vrai que $E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)$.

- Jusqu'à la fin de la question, on se place dans le cas où f possède exactement deux valeurs propres, que l'on note λ et μ. Le polynôme caractéristique de f s'écrit donc $(X-\lambda)^{n_\lambda}(X-\mu)^{n_\mu}$, où n_λ et n_μ sont deux entiers naturels non nuls dont la somme vaut $\dim(E)$.

  - $\operatorname{Im}(v^p)$ est non nul car λ est valeur propre de f, et stable par f, donc f en induit un endomorphisme g.
    On sait que λ n'est pas valeur propre de g et que χ_g divise χ_f, donc χ_g s'écrit $(X-\mu)^m$, où $1 \leqslant m \leqslant m_\lambda$.
    Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout $y \in \operatorname{Im}(v^p)$,
    $\left(g - \mu \mathrm{I}_{\operatorname{Im}(v^p)}\right)^m(y) = 0_E$, donc aussi $y \in \operatorname{Ker}((f-\mu \mathrm{I}_E)^m)$.
    En particulier, $y \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\operatorname{Ker}\left((f-\mu \mathrm{I}_E)^k\right)\right)$, donc $y \in E^c_\mu(f)$.
    On vient de montrer que $\boxed{\operatorname{Im}(v^p) \subset E^c_\mu(f)}$.
  - Ce qui précède et le résultat de 13 assurent que $\dim(E^c_\lambda(f)) + \dim\left(E^c_\mu(f)\right) \geqslant \dim(E)$.
    D'après 13, $E^c_\lambda(f)$ et $E^c_\mu(f)$ sont stables par f, donc f induit un endomorphisme h de $E^c_\lambda(f) \cap E^c_\mu(f)$.
    D'après 14, μ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme de $E^c_\lambda(f)$ induit par f, et λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme de $E^c_\mu(f)$ induit par f, donc ni λ ni μ n'est valeur propre de h.

Enfin, le spectre de tout endomorphisme induit par f est contenu dans le spectre de f, donc le spectre de h est vide, ce qui exclut que l'espace vectoriel complexe de dimension finie $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$ soit non nul.
Finalement, $\dim(E_\lambda^c(f)) + \dim\left(E_\mu^c(f)\right) \geqslant \dim(E)$ et $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) = \{0_E\}$, donc $\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)}$.

Partie E

Question 16

Comme a^2 et b^2 sont nuls :
$u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$.
Toujours car a^2 est nul, $a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$,
et $u^2 \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$.
Ainsi : $\boxed{u^2 \text{ et } a \text{ commutent}}$.
C'est exactement la même preuve pour u^2 et b .

Question 17

- p est pair, donc u^p est une puissance de u^2. Or a et b commutent avec u^2, donc ils commutent avec u^p, donc $\boxed{\mathrm{Im}(u^p) \text{ est stable par } a \text{ et } b}$.

- Pour tout $g \in G$, $a_G^2(g) = a^2(g)$.
  Or a^2 est de carré nul, donc, pour tout $g \in G$, $a_G^2(g) = 0_E$, donc $\boxed{a_G \text{ est de carré nul}}$.
  C'est la même chose pour b_G.

Question 18

- u est non bijectif, donc, comme E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(u)$ n'est pas nul, donc $E_0^c(u)$ n'est pas nul, donc, d'après la question 13 et par définition de p, u induit un endomorphisme u_0 de $E_0^c(u)$ pour lequel u_0^p est nul.
  Ainsi, u_0 est nilpotent, donc, d'après le résultat admis par l'énoncé, il existe deux sous-espaces supplémentaires A_0 et B_0 de $E_0^c(u)$ pour lesquels $u_0(A_0) \subset B_0$ et $u_0(B_0) \subset A_0$.

- D'après les questions 13 et 14 : u induit un endomorphisme u_1 de G, dont 0 n'est pas valeur propre.
  Ainsi, comme endomorphisme d'un espace de dimension finie dont 0 n'est pas valeur propre, u_1 est bijectif.
  Mais, d'après la question 17, u_1 vérifie la condition (C2), donc,d'après la question 10, il existe deux sous-espaces supplémentaires A_1 et B de G pour lesquels $u_1(A_1) \subset B_1$ et $u_1(B_1) \subset A_1$.

- On "recolle" : $E = E_0^c(u) \oplus G = (A_0 \oplus B_0) \oplus (A_1 \oplus B_1) = (A_0 \oplus A_1) \oplus (B_0 \oplus B_1)$.
  Mais tout $a \in A_0 \oplus A_1$ s'écrit $a_0 + a_1$, où $a_0 \in A_0$ et $a_1 \in A_1$, et donc $u(a) = u_0(a_0) + u_1(a_1)$ est élement de $B_0 \oplus B_1$.
  De même, $u(B_0 \oplus B_1) \subset A_0 \oplus A_1$.
  Finalement : $\boxed{u \text{ est échangeur}}$.

Partie F

Question 19

De la relation $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, on déduit que $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$.
Ainsi, $\varphi^2 \circ u = \varphi \circ (\varphi \circ u) = -\varphi \circ u \circ \varphi$, et $u \circ \varphi^2 = (u \circ \varphi) \circ \varphi = -\varphi \circ u \circ \varphi$,
donc $\boxed{\varphi^2 \text{ et } u \text{ commutent}}$.

Question 20

- Comme endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, φ^2 possède une valeur propre λ.
  On applique alors la question 13 : il existe $p \in \mathbb{N}$ de sorte que
  $E = \operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right) \oplus \operatorname{Im}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$.
  Dans cette déconposition, on sait que $\operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ est non nul.
  De plus, $(\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ est un polynôme en φ,donc commute avec φ, donc $\operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ et $\operatorname{Im}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ sont stables par φ.
  D'autre part, $(\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ est un polynôme en φ^2, et φ^2 et u commutent, donc $\operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ et $\operatorname{Im}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ sont stables par u.
  On note alors φ_1 et φ_2 les endomorphismes respectifs de $\operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ et $\operatorname{Im}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$ induits par φ, et u_1 et u_2 ceux induits par u.
  Comme endomorhismes d'espaces vectoriels de dimensions finies de noyaux nuls, φ_1 et φ_2 sont bijectifs, puis, comme $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, $-u_1 = \varphi_1 \circ u_1 \circ \varphi_1^{-1}$et $-u_2 = \varphi_2 \circ u_2 \circ \varphi_2^{-1}$.
  Alors, comme u est indécomposable, $\operatorname{Im}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right) = \{0_E\}$.
  Ainsi, $E = \operatorname{Ker}\left((\varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E)^p\right)$, donc $(X - \lambda)^p$ est un polynôme annulateur de φ^2,
  donc $\boxed{\lambda \text{ est la seule valeur propre de } \varphi^2}$.

- λ est un complexe non nul. Il possède donc deux racines carrés opposées.
  Notons l'une d'entre elles.
  On vient de voir que $(X^2 - \lambda)^p = (X - \alpha)^p (X + \alpha)^p$ est un polynôme annulateur de φ,
  donc $\boxed{\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}}$.

Question 21

- D'après la question 15, $E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi)$.
  Il est alors tentant de montrer que $u\left(E^c_\alpha(\varphi)\right) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$ et $u\left(E^c_{-\alpha}(\varphi)\right) \subset E^c_\alpha(\varphi)$.

- On a vu que $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$. On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k \left(u \circ \varphi^k\right) = \varphi^k \circ u$.

- Soit alors $x \in E^c_\alpha(\varphi)$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^q(x) = 0_E$.
  Alors, en appliquant la formule du binôme à φ et αI_E, qui commutent :
  $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^q(u(x)) = \sum\limits_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \alpha^{q-k} \varphi^k(u(x))$,
  donc, d'après le point précédent, $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^q(u(x)) = u\left(\sum\limits_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \alpha^{q-k} (-1)^k \varphi^k(x)\right)$.
  On remplace $(-1)^k$ par $(-1)^q (-1)^{q-k}$ (c'est la même chose!) :

$$(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^q (u(x)) = (-1)^q u \left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-\alpha)^{q-k} \varphi^k (x) \right) = (-1)^q u ((\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^q (x)),$$

ce qui, par définition de x, est nul.

- On vient de montrer que $u(E_\alpha^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$.
  De même, $u\left(E_{-\alpha}^c(\varphi)\right) \subset E_\alpha^c(\varphi)$.

- Finalement, $\boxed{u \text{ est échangeur}}$.

Question 22

- On commence par démontrer par récurrence forte sur $\dim(E)$ que, pour tout endomorphisme u de E vérifiant $(C3)$, il existe un nombre fini $E_1, \cdots, E_k$ de sous-espaces vectoriels de E vérifiant à la fois :

  - $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$
  - $E_1, \cdots, E_k$ sont stables par u
  - pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme u_i de E_i induit par u vérifie $(C3)$ et est indécomposable.

- Si u est un endomorphisme d'un espace complexe de dimension finie vérifiant $(C3)$, on considère une telle décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ de E.
  On applique alors la question 21 dans $E_1, \cdots, E_k$:
  pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, E_i se décompose sous la forme $E_i = A_i \oplus B_i$, avec $u_i(A_i) \subset B_i$ et $u_i(B_i) \subset A_i$.
  Alors, en raisonnant comme en Q18, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ et $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $u(A) \subset B$, et $u(B) \subset A$,
  donc $\boxed{u \text{ est un échangeur}}$.