

Mines PSI 2

Course poursuite

1 Généralités.

1. $\phi(., x_0) - \lambda$ est une fonction continue et qui ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, T(x_0)[$. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur cet intervalle. Or, elle vaut $x_0 > 0$ en 0. Ainsi

$$\forall t \in [0, T(x_0)[, \phi(t, x_0) > \lambda(t)$$

D'après $E(\lambda)$, la dérivée de $\phi(., x_0)$ est alors strictement positive sur $[0, T(x_0)[$ et $\phi(., x_0)$ est strictement croissante sur cet intervalle. Par théorème de limite monotone, elle admet donc une limite éventuellement infinie en $T(x_0)$.

2. Si, par l'absurde, $\phi(t, x_0) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T(x_0)$ alors $\phi(t, x_0) - \lambda(t) \rightarrow +\infty$ aussi (λ est continue en $T(x_0)$) et donc $\phi'(t, x_0) \rightarrow 0$. $\phi'(., x_0)$ est continue sur $[0, T(x_0)[$ et admet une limite finie en $T(x_0)$; c'est donc une fonction bornée sur l'intervalle $[0, T(x_0)[$. Notons M un réel tel que $\forall t \in [0, T(x_0)[, |\phi'(t, x_0)| \leq M$. On a alors

$$\forall t \in [0, T(x_0)[, |\phi(t, x_0)| = \left| x_0 + \int_0^t \phi'(u, x_0) du \right| \leq |x_0| + \int_0^t |\phi'(u, x_0)| du \leq x_0 + T(x_0)M$$

et $\phi(., x_0)$ est aussi bornée sur $[0, T(x_0)[$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. D'après la question précédente, $\phi(., x_0)$ admet donc une limite finie en $T(x_0)$:

$$T(x_0) < +\infty \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} / \lim_{t \rightarrow T(x_0)^-} \phi(t, x_0) = \ell$$

3. Par croissance de $\phi(., x_0)$, on a alors $\forall t \in [0, T(x_0)[, \phi(t, x_0) \leq \ell$ et donc (question 1.) $\lambda(t) < \ell$. En passant à la limite $t \rightarrow T(x_0)^-$, la continuité de λ donne

$$\lambda(T(x_0)) \leq \ell$$

Si, par l'absurde, cette inégalité est stricte alors $\phi'(t, x_0) \rightarrow \frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$ quand $t \rightarrow T(x_0)^-$. Par un corollaire des accroissements finis, le prolongement par continuité de $\phi(., x_0)$ (par $\phi(T(x_0), x_0) = \ell$ et que l'on continue à noter $\phi(., x_0)$) est dérivable en $T(x_0)$ avec $\phi'(T(x_0), x_0) = \frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$ et de plus $\phi(., x_0)$ est à dérivée continue en $T(x_0)$. On a ainsi $\phi(., x_0) \in \mathcal{C}^1([0, T(x_0)])$ (et c'est une solution de $E(\lambda)$ sur le segment).

Par ailleurs, le théorème 1 appliqué avec $y_0 = \ell$ et $t_0 = T(x_0)$ donne l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une solution ψ de $E(\lambda)$ sur $]T(x_0) - \varepsilon, T(x_0) + \varepsilon[$ telle que $\psi(T(x_0)) = \ell$. Soit θ la fonction définie par

$$\forall t \in [0, T(x_0)[, \theta(t) = \phi(t, x_0) \quad \text{et} \quad \forall t \in [T(x_0), T(x_0) + \varepsilon[, \theta(t) = \psi(t)$$

θ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T(x_0) + \varepsilon[$ (le seul problème est en $T(x_0)$ où θ est continue et dérivable à droite et gauche avec le même nombre dérivé à droite et gauche égal à $\frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$). Elle est solution de $E(\lambda)$ sur $[0, T(x_0) + \varepsilon[$ et prolonge $\phi(., x_0)$ ce qui contredit le caractère maximal de cette dernière solution.

On a donc prouvé que

$$T(x_0) < +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T(x_0)^-} \phi(t, x_0) = \lambda(T(x_0))$$

4. On suppose $0 < x_0 < y_0$ et, par l'absurde, qu'il existe t_1 tel que $\phi(t_1, x_0) = \phi(t_1, y_0)$. D'après le théorème 1 (second point) les fonctions $\phi(., x_0)$ et $\phi(., y_0)$ sont égales sur $[0, \min(T(x_0), T(y_0))]$. Elles le sont, en particulier, en 0 ce qui contredit $x_0 \neq y_0$. On a donc montré que

$$0 < x_0 < y_0 \Rightarrow \forall t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[, \phi(t, x_0) \neq \phi(t, y_0)$$

La fonction $\phi(\cdot, x_0) - \phi(\cdot, y_0)$ est continue sur $[0, \min(T(x_0), T(y_0))]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur celui-ci. En 0, elle est négative et on a donc

$$0 < x_0 < y_0 \Rightarrow \forall t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))], \phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$$

5. On suppose que $0 < x_0 < y_0$ et, par l'absurde, que $T(x_0) > T(y_0)$. On a donc $T(y_0) < +\infty$ ce qui montre que $\phi(t, y_0) \rightarrow \lambda(T(y_0))$ quand $t \rightarrow T(y_0)^-$ (question 3.). En passant à la limite dans la relation de la question 4. on a alors $\phi(T(y_0), x_0) \leq \lambda(T(y_0))$ ce qui contredit le résultat de la question 1. ($\forall t < T(x_0), \phi(t, x_0) > \lambda(t)$). On a ainsi montré que

$$0 < x_0 < y_0 \Rightarrow T(x_0) \leq T(y_0)$$

2 Etude de deux exemples.

6. Soit x la solution maximale de $E(\lambda_0, x_0)$. D'après la question 1., $\forall t \in [0, T(x_0)], x(t) > 0$. L'équation donne en outre $(x^2)'(t) = 4$ et, en intégrant cette relation et compte-tenu de la positivité de x ,

$$\forall t \in [0, T(x_0)], x(t) = \sqrt{x_0^2 + 4t}$$

On vérifie réciproquement (c'est la seule partie utile du raisonnement) que $t \mapsto \sqrt{x_0^2 + 4t}$ est solution de $E(\lambda_0, x_0)$ sur $\mathbb{R}^+$. C'est la solution maximale et on a $T(x_0) = +\infty$ et donc pas capture.

7. On note (en choisissant $a = 4$)

$$\forall t \in [0, 1], \phi_0(t) = 4 - 2\sqrt{1-t}$$

ϕ_0 est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$\forall t \in [0, 1], \phi_0'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{\phi_0(t) - \lambda_1(t)}$$

Comme $\phi_0(0) = 2$, ϕ_0 est solution de $E(\lambda_1, 2)$ sur $[0, 1[$.

ϕ_0' est de limite infinie en 1^- et on ne peut donc prolonger ϕ_0 à 1 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. A fortiori, on ne peut prolonger ϕ à un sur-intervalle de $[0, 1[$ en une fonction solution de $E(\lambda_1, 2)$. On a donc la solution maximale et

$$T(2) = 1$$

8. Un simple calcul donne

$$\frac{d}{dt}(\ln(|\phi(t) - \phi_0(t)|)) = \frac{\phi'(t) - \phi_0'(t)}{\phi(t) - \phi_0(t)} = \frac{1}{-(\phi(t) - \lambda_1(t))\sqrt{1-t}}$$

9. D'après la question 4.

$$\text{si } x_0 < 2, \forall t \in [0, \min(1, T(x_0))], \phi(t) = \phi(t, x_0) \leq \phi(t, 2) = \phi_0(t)$$

$$\text{si } x_0 > 2, \forall t \in [0, \min(1, T(x_0))], \phi_0(t) = \phi(t, 2) \leq \phi(t, x_0) = \phi(t)$$

Dans tous les cas, la fonction $C : t \mapsto \ln(|\phi(t) - \phi_0(t)|) - \frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t) - \phi_0(t)}$ est bien définie sur $[0, \min(1, T(x_0))]$. On remarque que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t) - \phi_0(t)} \right) = -\frac{1}{\sqrt{1-t}(\phi(t) - \phi_0(t))} - \frac{2\sqrt{1-t}}{(\phi(t) - \phi_0(t))^2}(\phi'(t) - \phi_0'(t))$$

Le calcul de la question précédente permet de simplifier l'expression en

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t) - \phi_0(t)} \right) &= \frac{1}{\phi(t) - \phi_0(t)} \left(\frac{2}{\phi(t) - \lambda_1(t)} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} \right) \\ &= \frac{1}{\phi(t) - \phi_0(t)} \frac{2\sqrt{1-t} + \lambda_1(t) - \phi(t)}{(\phi(t) - \lambda_1(t))\sqrt{1-t}} \\ &= \frac{1}{(\phi(t) - \lambda_1(t))\sqrt{1-t}}\end{aligned}$$

On en déduit que C' est nulle sur l'intervalle $[0, \min(1, T(x_0))]$ et que C est donc constante sur cet intervalle.

10. On suppose $x_0 < 2$ et on a donc (question **4.** et **5.**) $T(x_0) \leq T(2) = 1$ et

$$\forall t \in [0, T(x_0)[, \phi(t) < \phi_0(t)$$

On en déduit alors que $C(0) = \ln(2 - x_0) - \frac{2}{x_0 - 2}$. L'étude de cette fonction de x_0 montre qu'elle croît sur $]0, 2[$. Elle est donc supérieure à sa valeur en 0 ce qui donne

$$C(0) \geq 1 + \ln(2)$$

On suppose, par l'absurde, que $T(x_0) < 1$. D'après la question **3.**, $\phi(t)$ tend vers $\lambda_1(T(x_0))$ quand $t \rightarrow T(x_0)^-$. On en déduit alors que

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)^-} C(t) = \ln(2\sqrt{1 - T(x_0)}) + 1 = \ln(2) + 1 + \frac{1}{2} \ln(1 - T(x_0))$$

D'après la question précédente, cette quantité est plus grande que $\ln(2) + 1$ et on en déduit que $1 - T(x_0) \geq 1$ ce qui contredit $T(x_0) > 0$. On a ainsi prouvé que

$$T(x_0) = 1$$

11. On suppose $x_0 > 2$ et on a donc (question **4.** et **5.**)

$$T(x_0) \geq T(2) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, 1[, \phi_0(t) < \phi(t)$$

Si, par l'absurde, $T(x_0) = 1$ alors, avec la question **3.** on a ϕ et ϕ_0 qui tendent toutes deux vers $\lambda_1(1) = 4$ en 1^- . Comme $\phi > \phi_0$, la différence $\phi - \phi_0$ tend vers 0^+ en 1^- et donc $C(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$, ce qui contredit le caractère constant de C sur $[0, 1[$. Ainsi, on a prouvé que

$$T(x_0) > 1$$

On a alors

$$\forall t \in [1, T(x_0)[, \phi'(t) = \frac{2}{\phi(t) - 4}$$

En intégrant la relation $(\phi(u) - 4)\phi'(u) = 2$ entre 1 et t on a donc

$$\forall t \in [1, T(x_0)[, (\phi(t) - 4)^2 = (\phi(1) - 4)^2 + 4(t - 1)$$

Si, par l'absurde, $T(x_0) < +\infty$ alors $\phi(t) \rightarrow \lambda(T(x_0)) = 4$ quand $t \rightarrow T(x_0)^-$ (question **3.**) et donc $(\phi(1) - 4)^2 + 4(T(x_0) - 1) = 0$ ce qui est impossible (l'un des termes est ≥ 0 et l'autre est > 0). On a donc montré que

$$T(x_0) = +\infty$$

3 Une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de capture.

12. On a $|\lambda_1(1-s) - \lambda_1(1-t)| = 4(\sqrt{t} - \sqrt{s}) = \frac{4(t-s)}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}$ et donc

$$\frac{|\lambda_1(1-s) - \lambda_1(1-t)|}{\sqrt{t-s}} = \frac{F(s/t)}{1 + \sqrt{s/t}} \text{ avec } F(u) = 4\sqrt{1-u}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < x < y$. Trois cas sont possible.

- $0 < x < y \leq 1$ et alors $\frac{|\lambda_1(x) - \lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = \frac{F((1-y)/(1-x))}{1 + \sqrt{(1-y)/(1-x)}} \leq F((1-y)/(1-x)) \leq 4$.

- $0 < x \leq 1 < y$ et alors $\frac{|\lambda_1(x) - \lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = \frac{4\sqrt{1-x}}{\sqrt{y-x}} \leq 4$.

- $1 < x < y$ et alors $\frac{|\lambda_1(x) - \lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = 0 \leq 4$.

Le quotient est toujours plus petit que 4 et donc $M(\lambda_1) \leq 4$. Le quotient est égal à 1 pour $x = 1/2$ et $y = 1$ (par exemple) et le majorant trouvé est atteint. On a donc

$$M(\lambda_1) = 4 = \max_{0 < x < y} \frac{|\lambda_1(x) - \lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}}$$

13. Si, par l'absurde, $M(\lambda) = 0$ alors

$$\forall 0 < x < y, \frac{|\lambda(x) - \lambda(y)|}{\sqrt{y-x}} \leq 0$$

et donc λ est une fonction constante et comme $\lambda(0) = 0$, c'est la fonction nulle. La question 6 indique alors que $T(x_0) = +\infty$ ce qui est excus. Ainsi

$$M(\lambda) > 0$$

14. Posons $\hat{x} : t \mapsto \frac{1}{r}x(bt)$. C'est une fonction de classe C^1 sur $[0, T(x_0)/b[$ et

$$\forall t \in [0, T(x_0)/b[, \hat{x}'(t) = \frac{b}{r}x'(bt) = \frac{2b/r}{x(bt) - \lambda(bt)} = \frac{2b/r^2}{\hat{x}(t) - \hat{\lambda}_r(bt/r^2)}$$

En prenant $b = r^2$, on obtient que $\hat{x}$ est solution de $E(\hat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$ ($\hat{x}(0) = \frac{1}{r}x(0) = \frac{1}{r}x_0$). C'est une solution maximale (car si on pouvait prolonger $\hat{x}$ par ϕ , on pourrait aussi prolonger x par $t \mapsto r\phi(t/r^2)$) et son temps de vie est $T(x_0)/r^2$. Ce temps de vie vaut 1 si $r = \sqrt{T(x_0)}$. On choisit donc

$$r = \sqrt{T(x_0)} \text{ et } b = T(x_0)$$

On a alors $\hat{x}$ solution maximale de $E(\hat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$ de temps de vie égal à 1. D'après la question 3., $\hat{x}$ est prolongeable par continuité en 1 en posant

$$\hat{x}(1) = \hat{\lambda}_r(1) = \frac{1}{r}\lambda(r^2) = \frac{1}{\sqrt{T(x_0)}}\lambda(T(x_0))$$

15. x étant croissante sur $[0, 1]$ (question 1. et prolongement par continuité en 1 qui conserve la monotonie sur le segment), on a

$$\forall t \in [0, 1[, x(t) - \lambda(t) \leq x(1) - \lambda(t) = \lambda(1) - \lambda(t) = \frac{\lambda(1) - \lambda(t)}{\sqrt{1-t}} \sqrt{1-t} \leq M(\lambda) \sqrt{1-t}$$

et l'inégalité reste vraie pour $t = 1$. On en déduit que

$$\forall t \in [0, 1[, x'(t) = \frac{2}{x(t) - \lambda(t)} \geq \frac{2}{M(\lambda) \sqrt{1-t}}$$

En intégrant cette relation entre u et v avec $0 \leq u \leq v < 1$ puis en faisant tendre v vers 1 on obtient

$$\forall u \in [0, 1[, x(1) - x(u) \geq \frac{4}{M(\lambda)} \sqrt{1-u}$$

16. On a donc

$$\forall t \in [0, 1], x(t) - \lambda(t) \leq x(1) - \lambda(t) - \frac{4}{M(\lambda)}\sqrt{1-t}$$

En remarquant que $x(1) - \lambda(t) = \frac{\lambda(1)-\lambda(t)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{1-t} \leq M(\lambda)\sqrt{1-t}$ on a finalement

$$\forall t \in [0, 1], x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{M(\lambda)})\sqrt{1-t}$$

17. On suppose que $\forall t \in [0, 1], x(t) - \lambda(t) \leq \mu\sqrt{1-t}$. On a alors

$$\forall t \in [0, 1[, x'(t) \geq \frac{2}{\mu\sqrt{1-t}}$$

En intégrant entre u et v pour $0 \leq u \leq v < 1$ puis en faisant tendre v vers 1 on a alors

$$\forall u \in [0, 1[, x(1) - x(u) \geq \frac{4}{\mu}\sqrt{1-u}$$

et ensuite $\forall t \in [0, 1[, x(t) - \lambda(t) \leq x(t) - x(1) + x(1) - \lambda(t) \leq -\frac{4}{\mu}\sqrt{1-t} + \lambda(1) - \lambda(t)$ et on utilise encore $\lambda(1) - \lambda(t) \leq M(\lambda)\sqrt{1-t}$ pour conclure que

$$\forall t \in [0, 1[, x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{\mu})\sqrt{1-t}$$

et ceci reste vrai pour $t = 1$. Comme $x - \lambda$ est strictement positive, on en déduit que

$$M(\lambda) - \frac{4}{\mu} > 0$$

18. On prouve par récurrence que pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini, est > 0 et vérifie

$$\forall t \in [0, 1], x(t) - \lambda(t) \leq u_n\sqrt{1-t}$$

- C'est vrai au rang 0 car $M(\lambda) > 0$ et avec la question **15**.
- Supposons le résultat vrai pour un rang $n \geq 0$. On utilise alors la question **17** pour obtenir le résultat au rang $n + 1$.

On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2 - M(\lambda)u_n + 4}{u_n}$. Comme $M(\lambda) \in]0, 4[$, $X^2 - M(\lambda)X + 4$ est de discriminant < 0 et ce polynôme ne prend que des valeurs positives. La suite (u_n) est donc décroissante. Etant minorée par 0, elle converge. Sa limite ℓ est soit nulle soit solution de $\ell = M(\lambda) - \frac{4}{\ell}$ et ce dernier cas est exclus (car le polynôme $X^2 - M(\lambda)X + 4$ n'a pas de racine réelle). On a ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

En passant à la limite dans la relation vérifiée lors de la récurrence, on a alors $\forall t, x(t) \leq \lambda(t)$ ce qui est faux.

Dans notre raisonnement par l'absurde, on a obtenu une contradiction et

$$T(x_0) = +\infty$$