

Olivier HALGAND  
 olivier.halgand@ac-lyon.fr

**PROBLÈME I : Algèbre et Géométrie**

**A. Étude de deux applications**

1. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Alors :  $\deg P \left( \frac{X}{2} \right) \leq 2$  et  $\deg P \left( \frac{X+1}{2} \right) \leq 2$  donc :

$$\deg f(P) \leq \max \left( \deg P \left( \frac{X}{2} \right), \deg P \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) \leq 2,$$

et donc :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) \in \mathbb{R}_2[X].}$$

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2} \left( (\lambda P + \mu Q) \left( \frac{X}{2} \right) + (\lambda P + \mu Q) \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \lambda P \left( \frac{X}{2} \right) + \mu Q \left( \frac{X}{2} \right) + \lambda P \left( \frac{X+1}{2} \right) + \mu Q \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left( P \left( \frac{X}{2} \right) + P \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) + \frac{\mu}{2} \left( Q \left( \frac{X}{2} \right) + Q \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est linéaire, et donc : } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

2. De la même manière, pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$  et tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q),$$

donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

3. On a :  $f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ ,  $f(X) = \frac{1}{2} \left( \frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X$  et :

$$f(X^2) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{X}{2} \right)^2 + \left( \frac{X+1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{X^2}{4} + \frac{X^2 + 2X + 1}{4} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2,$$

d'où :

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

4. La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  étant triangulaire, on a immédiatement :  $\det(f) = \frac{1}{8} \neq 0$ , donc :

$$\boxed{f \text{ est bijective, donc injective et surjective.}}$$

5. Par équivalences :

$$P \in \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow (X - 1) \text{ divise } P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - 1)Q.$$

Or, puisque  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on doit avoir  $\deg(Q) \leq 1$ . Donc :

une base de  $\text{Ker}\varphi$  est  $(X - 1, (X - 1)X)$ , qui est donc de dimension 2.

*Remarque* : on peut aussi, bien sûr, considérer un polynôme quelconque  $P = aX^2 + bX + c$  de  $\mathbb{R}_d$  et écrire :

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b,$$

et donc :  $P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1) \in \text{Vect}((X - 1), (X^2 - 1))$  ce qui permet de déterminer une (autre) base de  $\text{Ker}\varphi$ .

6. Puisque  $\text{Ker}\varphi \neq \{0\}$ ,

$\varphi$  n'est pas injective.

D'après le théorème du rang, on a l'égalité :

$$\dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}_2[X], \quad \text{d'où : } \dim \text{Im}\varphi = 3 - 2 = 1 = \dim \mathbb{R},$$

donc :

$\varphi$  est surjective.

*Remarque* : on peut aussi déterminer un antécédent d'un élément quelconque de  $\mathbb{R}$  par  $\varphi$  ce qui est facile ici :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha) = \alpha$ , ce qui prouve encore que  $\varphi$  est surjective.

## B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille  $\mathcal{B}'$  est une famille de polynômes à degrés échelonnés de  $\mathbb{R}_2[X]$  : elle est donc libre. De plus, elle compte trois vecteurs et  $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ , c'est-à-dire que c'est une famille libre maximale, autrement dit

$\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

8. On a immédiatement :

la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est :  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

9. La matrice  $Q$  est triangulaire, donc :  $\det(Q) = -12 \neq 0$  ce qui prouve que

$Q$  est inversible.

Pour inverser la matrice  $Q$  on peut (par exemple) exprimer les vecteurs de  $\mathcal{B}$  en fonction des vecteurs de  $\mathcal{B}'$ , ce qui donne :

$$X = -\frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X^2 = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1) - \frac{1}{2}(-2X + 1) + \frac{1}{3},$$

donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

10. La formule de changement de base s'écrit :

$$M = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

11. Puisque  $M$  est diagonale, on en déduit que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a :  $A = QMQ^{-1}$  et donc, par une récurrence immédiate :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = QM^nQ^{-1}$ . On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

12. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'écriture matricielle de  $f^n(P)$  est :

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n}\right)c \\ \frac{1}{2^n}b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{1}{4^n}c \end{pmatrix},$$

et donc :

$$f^n(P) = \left(a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2^{n+1}} + \frac{c}{3} - \frac{c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right)X + \frac{c}{4^n}X^2.$$

13. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \varphi(f^n(P)) &= a + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{c}{3} - \frac{c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \frac{b}{2^n} + \left(\frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}. \end{aligned}$$

Or, on a aussi :

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3},$$

et donc on a bien l'égalité :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

### C. Une autre preuve du résultat précédent

14. Comme indiqué, on raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- **Initialisation** : pour  $n = 1$ , on a :  $f(P) = \frac{1}{2} \left( P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 P\left(\frac{X+k}{2}\right)$ , donc la propriété est initialisée.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  donné. Alors, pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  :

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(P) &= f^n(f(P)) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(P) \left( \frac{X+k}{2^n} \right) && \left. \begin{array}{l} \text{d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left( P \left( \frac{X+k}{2} \right) + P \left( \frac{X+k}{2} + 1 \right) \right) && \left. \begin{array}{l} \text{par définition} \\ \text{de } f(P) \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} P \left( \frac{X+k}{2^{n+1}} \right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P \left( \frac{X+k+2^n}{2^{n+1}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} P \left( \frac{X+k}{2^{n+1}} \right) + \sum_{k=2^n}^{2^n+(2^n-1)} P \left( \frac{X+k}{2^{n+1}} \right) \right) && \left. \begin{array}{l} \text{Avec un changement} \\ \text{d'indice} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P \left( \frac{X+k}{2^{n+1}} \right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P \left( \frac{X+k}{2^n} \right).}$$

15. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P \left( \frac{1+k}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P \left( \frac{k}{2^n} \right).$$

On reconnaît une somme de Riemann : si  $g$  est une fonction continue sur le segment  $[a, b]$ , alors on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N g \left( a + k \frac{b-a}{N} \right) = \int_a^b g(t) dt.$$

Ici,  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $N = 2^n$  et bien sûr  $g = P$ , et on obtient donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(P) = \int_0^1 P(t) dt.}$$

## D. Étude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

16. Pour tout réel  $m$  une équation de  $S_m$  est :

$$x^2 + y^2 + (z - m\sqrt{2})^2 = m^2 + 2,$$

donc

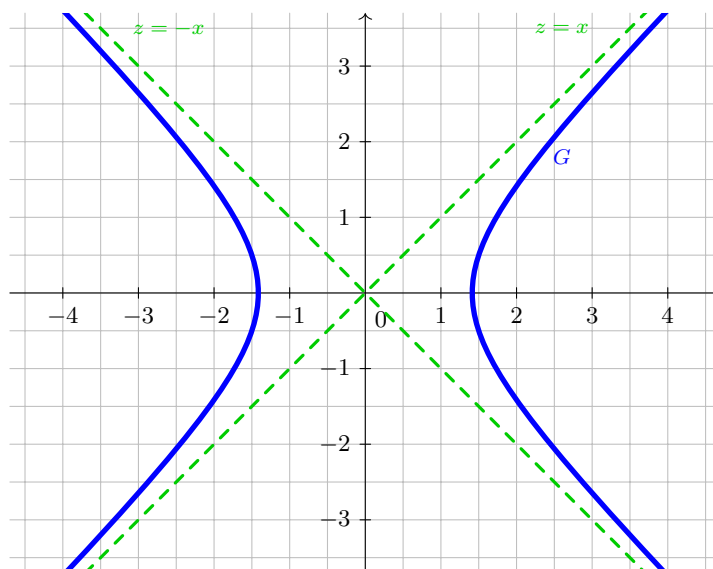
$$\boxed{S_m \text{ est la sphère de centre } \Omega_m(0, 0, m\sqrt{2}) \text{ et de rayon } r_m = \sqrt{m^2 + 2}.}$$

17. L'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{E}$  a pour équation, dans le plan  $\mathcal{P}$  :

$$x^2 = z^2 + 2 \quad \text{soit :} \quad \boxed{\frac{x^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{2}^2} = 1.}$$

$$\boxed{G = \mathcal{P} \cap \mathcal{E} \text{ est une hyperbole de centre } O \text{ et d'asymptotes les droites d'équations } z = x \text{ et } z = -x.}$$

18. La représentation de  $G$  dans le plan  $\mathcal{P}$  est :



19. L'équation réduite de l'hyperbole  $G$  est :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$  avec  $a = b = \sqrt{2}$ .

$$\text{L'excentricité de } G \text{ est : } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

La distance entre le centre  $O$  de l'hyperbole  $G$  et ses foyers est :  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ , donc

$$\text{les coordonnées des foyers de } G \text{ sont } (-2, 0) \text{ et } (2, 0).$$

20. Pour  $z = 0$  et  $z = 1$ , on obtient les deux points :

$$M_0 = (\sqrt{2} \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta, 0) \text{ et } M_1 = (\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta, \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta, 1),$$

on en déduit donc que

$$M_0 = (\sqrt{2} \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta, 0) \text{ est un point de } (D_\theta) \\ \text{et } \vec{u} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \text{ en est un vecteur directeur.}$$

21. Déterminons l'intersection de  $(D_\theta)$  et  $S_m$  :

$$(x, y, z) \in (D_\theta) \cap S_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \\ y = z \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2m\sqrt{2}z + m^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \\ y = z \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta \\ (z^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta z + 2 \sin^2 \theta) \\ \quad + (z^2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta z + 2 \cos^2 \theta) + z^2 - 2m\sqrt{2}z + m^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \\ y = z \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta \\ 2z^2 - 2m\sqrt{2}z + m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \\ y = z \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta \\ 2 \left( z - \frac{m}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0 \end{cases},$$

et donc :

$$(D_\theta) \cap S_m \text{ comporte un unique point, donc } (D_\theta) \text{ est tangente à } S_m \text{ en ce point.}$$

22. Soit  $M = (x, y, z)$  un point de  $(D_\theta)$ . Alors, en reprenant le calcul précédent :

$$x^2 + y^2 = (z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta)^2 + (z \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta)^2 = z^2 + 2,$$

donc les coordonnées de  $M$  vérifient l'équation de  $\mathcal{E}$  :  $M \in \mathcal{E}$  et donc :

$$\boxed{(D_\theta) \subset \mathcal{E}.}$$

23. Soit  $M = (x, y, z) \in \mathcal{E}$ . On cherche  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} x - z \cos \theta = \sqrt{2} \sin \theta \\ y - z \sin \theta = -\sqrt{2} \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = x \\ -\sqrt{2} \cos \theta + z \sin \theta = y \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système (les inconnues étant  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ ) est :  $\Delta = \begin{vmatrix} z & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & z \end{vmatrix} = z^2 + 2 > 0$ , ce qui signifie qu'il y a toujours une unique solution (en  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ ) :

$$\cos \theta = \frac{1}{z^2 + 2} \begin{vmatrix} x & \sqrt{2} \\ y & z \end{vmatrix} = \frac{xz - y\sqrt{2}}{z^2 + 2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{z^2 + 2} \begin{vmatrix} z & x \\ -\sqrt{2} & y \end{vmatrix} = \frac{yz + x\sqrt{2}}{z^2 + 2}.$$

Pour savoir s'il existe  $\theta$  vérifiant ces deux égalités, on vérifie que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , ce qui donne :

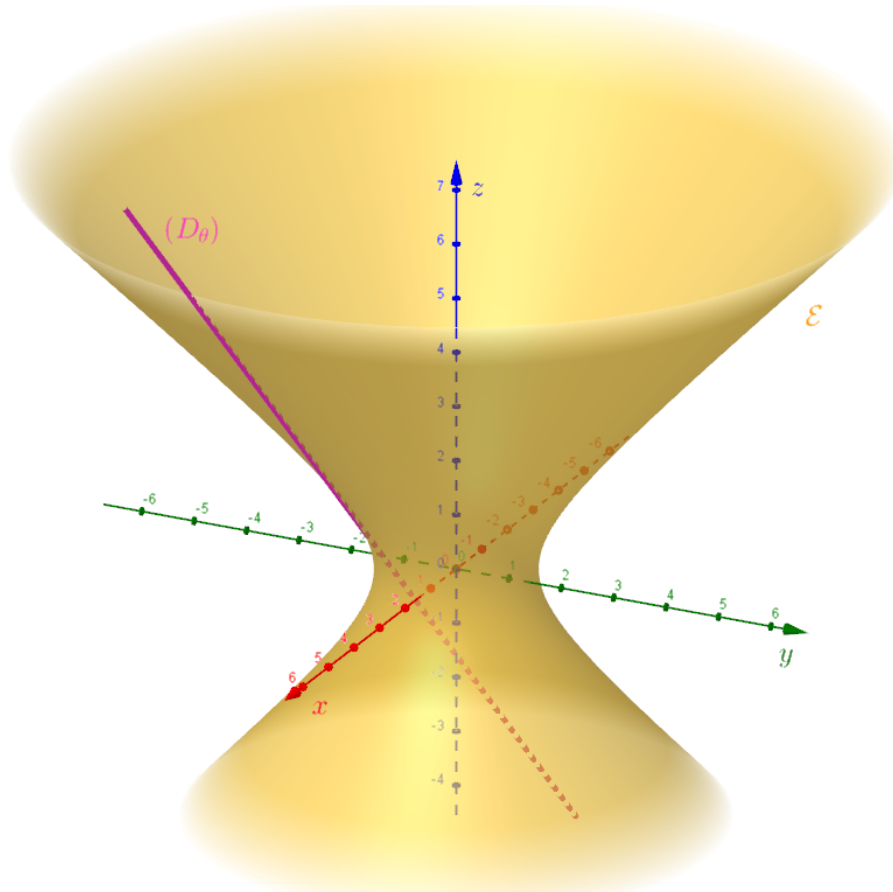
$$\frac{(xz - y\sqrt{2})^2}{(z^2 + 2)^2} + \frac{(yz + x\sqrt{2})^2}{(z^2 + 2)^2} = \frac{x^2 z^2 - 2xyz\sqrt{2} + 2y^2 + y^2 z^2 + 2xyz\sqrt{2} + 2x^2}{(z^2 + 2)^2} = \frac{(x^2 + y^2)(z^2 + 2)}{(z^2 + 2)^2} = 1$$

car  $M \in \mathcal{E}$  donc  $x^2 + y^2 = z^2 + 2$ . On a donc démontré que :

$$\boxed{\text{si } M \in \mathcal{E}, \text{ alors il existe } \theta \text{ (unique à } 2\pi \text{ près) tel que : } M \in (D_\theta).}$$

24. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est une surface réglée, ses génératrices étant les droites } (D_\theta).}$$



**PROBLÈME II : Analyse**

**A. Étude d'une fonction**

1. Si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $(-x) \in \mathbb{R}^*$  et :

$$f(-x) = (-x) \operatorname{sh} \left( -\frac{1}{x} \right) = x \operatorname{sh} \left( \frac{1}{x} \right) = f(x),$$

donc :

la fonction  $f$  est paire.

2. (a) On sait que  $\operatorname{sh} x \sim x$ , donc :  $\operatorname{sh} \left( \frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ . On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

(b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on peut écrire :

$$f(x) = x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} = x e^{1/x} \frac{1 - e^{-2/x}}{2}.$$

Or, d'une part :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( -\frac{2}{x} \right) = -\infty$  donc, par composition :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-2/x} = 0$ . Il s'ensuit que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 - e^{-2/x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Et, d'autre part (avec le changement de variable  $u = \frac{1}{x}$  :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$$

par croissances comparées. Donc, par produit et parité :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x),$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

3. Par composée et produit de fonctions dérivables,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \operatorname{sh} \left( \frac{1}{x} \right) + x \left( -\frac{1}{x^2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{1}{x} \right) = \operatorname{sh} \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left( \frac{1}{x} \right),$$

d'où, en factorisant par  $\operatorname{ch} \left( \frac{1}{x} \right)$  qui n'est pas nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left( \operatorname{th} \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left( \frac{1}{x} \right).$$

4. On sait que, pour tout  $X \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $\operatorname{th}$  est dérivable sur  $[0, X]$  donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in ]0, X[, \quad \operatorname{th}(X) - \operatorname{th}(0) = \operatorname{th}'(c)(X - 0) \quad \text{soit :} \quad \operatorname{th}(X) = (1 - \operatorname{th}^2 c)X.$$

Or,  $\operatorname{th}$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $]0, 1[$ , donc :  $\operatorname{th}^c \in ]0, 1[$  ce qui permet de conclure :

$$\forall X \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{th}(X) < X.$$

5. On a donc :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$  et donc :  $\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ . Ainsi,  $f'$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}_+^*$ , d'où le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f$	$1$	$+\infty$	$1$

6. On a le développement limité :

$$\text{sh}(X) \underset{X \rightarrow 0}{=} X + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + o(X^5),$$

donc :

$$\frac{\text{sh}(X)}{X} \underset{X \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).$$

7. Avec le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$ , on en déduit que :

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

8. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\text{sh}x}{x}$ , définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus, au voisinage de 0 :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

ce qui permet d'affirmer que la fonction :  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  est prolongeable par continuité en 0, et cette fonction est aussi dérivable en 0 puisqu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Plus précisément,

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } F(0) = 1, F'(0) = 0.$$

## B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. Par définition :  $x = f$  et  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad y'(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right) + t \left(-\frac{1}{t^2}\right) \exp\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t-1}{t} \exp\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour les limites de  $y$ , on a, avec le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{e^u}{u} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{e^u}{u} = -\infty,$$

et :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} y(t) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} y(t) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{u} = 0.$$

On a donc le tableau suivant :

$t$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$x'(t)$	+		-	
$x$	$1$	$+\infty$	$+\infty$	$1$
$y$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$+\infty$
$y'(t)$	+		-	+

10. On a quatre « points » à étudier :

- En  $-\infty$ ,  $x$  tend vers 1 (par valeurs supérieures) et  $y$  tend vers  $-\infty$ . Donc, la droite  $d_1$  d'équation  $x = 1$  est asymptote à  $\Gamma$  et  $\Gamma$  est à droite de  $d_1$ .
- En 0 par valeurs inférieures,  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $y$  tend vers 0 (par valeurs négatives). Donc, l'axe des abscisses est asymptote à  $\Gamma$  et  $\Gamma$  est en-dessous de cet axe.
- En 0 par valeurs supérieures,  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$ . Or :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\exp(1/t)}{\text{sh}(1/t)} = \frac{2e^{1/t}}{e^{1/t} - e^{-1/t}} = \frac{2}{1 - e^{-2/t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 2,$$

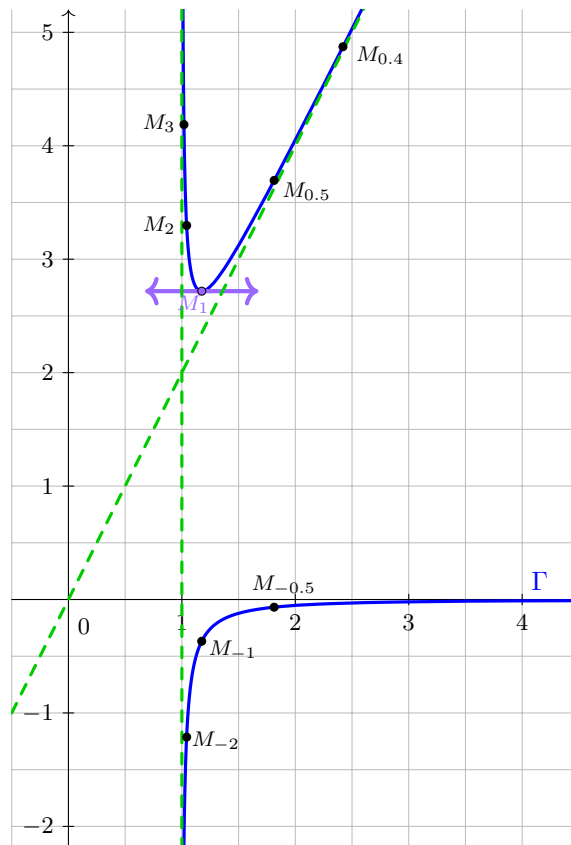
et :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{1}{t} e^{1/t} - \frac{2}{t} \frac{e^{1/t} - e^{-1/t}}{2} = \frac{e^{-1/t}}{t} = u e^{-u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{ } 0$$

par valeurs positives. Donc, la droite  $d_2$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $\Gamma$  et  $\Gamma$  est en-dessus de  $d_2$ .

- En  $+\infty$ ,  $x$  tend vers 1 (par valeurs supérieures) et  $y$  tend vers  $+\infty$ . Donc, la droite  $d_1$  d'équation  $x = 1$  est asymptote à  $\Gamma$  et  $\Gamma$  est encore à droite de  $d_1$ .

11. Pour  $t = 1$ , on a :  $x'(1) < 0$  et  $y'(1) = 0$  donc la courbe  $\Gamma$  présente une tangente horizontale. La courbe  $\Gamma$  a l'allure suivante :



### C. Une équation différentielle

12. Résolvons l'équation :  $xy' + y = \text{ch } x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- **Résolution de l'équation homogène** :  $xy' + y = 0$  qui s'écrit sous la forme :  $y' + \frac{1}{x}y = 0$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions :

$$x \mapsto C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- **Recherche d'une solution particulière** : on utilise la méthode de la « variation de la constante », en posant :  $y : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$ . On a alors :  $y'(x) = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$  et donc :

$$xy'(x) + y(x) = C'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \text{d'où : } C(x) = \operatorname{sh}(x).$$

Une solution particulière est donc :  $y : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ .

- **Résolution de l'équation avec second membre** :

les solutions de l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions :  $x \mapsto \frac{C + \operatorname{sh}(x)}{x}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

13. De même :

les solutions de l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions :  $x \mapsto \frac{D + \operatorname{sh}(x)}{x}$ , où  $D \in \mathbb{R}$ .

14. Pour qu'une fonction  $y$  soit solution de l'équation différentielle (E) sur  $\mathbb{R}$ , il faut qu'elle soit définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Or, on a vu que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$  mais la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0. Aussi, pour que  $y$  soit solution de (E) il faut que  $C = D = 0$ , et donc que  $y = F$ .

Réciproquement,  $F$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et bien solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ . De plus,  $F(0) = 1$  et  $F$  vérifie donc l'équation (E) en 0. Finalement :

$F$  est la seule solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

#### D. Étude d'une suite

15. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\frac{n+1}{n} > 1$ , et donc :  $\frac{n+1}{n} \in ]1, +\infty[ = f(\mathbb{R}_+^*)$ . La fonction  $f$  étant continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , c'est une bijection, qu'on notera  $\tilde{f}$ , de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $]1, +\infty[$ . En particulier,  $\frac{n+1}{n}$  admet un unique antécédent par  $\tilde{f}$ , ou encore

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

16. Tout d'abord, on sait que  $\tilde{f}^{-1}$  possède le même sens de variation que  $\tilde{f}$  : on en déduit que  $\tilde{f}^{-1}$  est strictement décroissante. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}(u_n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{donc : } u_n = \tilde{f}^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or :  $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$  et, donc :

$$\tilde{f}^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \tilde{f}^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \text{soit : } u_{n+1} > u_n,$$

ce qui permet de conclure que

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.

17. On sait que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}^{-1}(x) = +\infty$ . On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}^{-1}(x) = +\infty.$$

18. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , on peut écrire :

$$1 + \frac{1}{n} = f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$

On en déduit donc que :  $6n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  et donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

### E. Une fonction définie par une intégrale

19. Pour tout réel  $x$  :

$$\operatorname{sh}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{2 \operatorname{ch}(x) \cdot 2 \operatorname{sh}(x)}{2},$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x).$$

20. La fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle admet des primitives sur cet intervalle. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :  $\frac{x}{2} < x$  et  $[\frac{x}{2}, x] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Si  $F$  est l'une des primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right).$$

On peut donc en déduire que  $J$  est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J'(x) = F'(x) - \frac{1}{2} F'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right),$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J'(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4} \cdot 2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J'(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f(x) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

21. OPn sait que, sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f$  est strictement positive. De plus :

$$1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 2 \Leftrightarrow e^{1/x} + e^{-1/x} < 4 \Leftrightarrow (e^{1/x})^2 - 4e^{1/x} + 1 < 0.$$

Considérons la fonction polynôme :  $u : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ . Son discriminant est :  $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$ , donc  $u$  possède deux racines :

$$\alpha = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \beta = 2 - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\alpha},$$

et donc :

$$u(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{\alpha}, \alpha \right[.$$

On en déduit donc, puisque  $\alpha > 1$  :

$$1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < e^{1/x} < \ln \alpha \Leftrightarrow -\ln \alpha < \frac{1}{x} < \alpha \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln \alpha}$$

puisque'on résout l'inéquation sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi :

$$J'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

22. On en déduit le tableau suivant :

$x$	0	$\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$	$+\infty$	
$J'(x)$		-	0	+
$J$	$+\infty$	$J\left(\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right)$	$+\infty$	

23. L'allure de la courbe de  $J$  est donc :

