

CCP 2006 -PSI seconde épreuve : corrigé

Partie I.

La calculatrice étant autorisée, nous ne nous priverons pas de l'utiliser ici. Il n'y a pas de doute quant aux résultats renvoyés par Maple (utilisé ici) puisqu'il n'ya aucun paramètre à gérer.

1.

```
> M:=matrix(5,5,[0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0]):
> evalm(M^2);
matrix ([[2,0,1,0,1],[0,2,0,1,1],[1,0,2,1,0],[0,1,1,2,0],[1,1,0,0,2]])
```

2.

```
> evalm(M^2+M);
matrix ([[2,1,1,1,1],[1,2,1,1,1],[1,1,2,1,1],[1,1,1,2,1],[1,1,1,1,2]])
```

On a donc

$$M^2 + M = I_5 + J_5$$

3.

```
> J:=matrix(5,5,(i,j)->1):
> evalm(J^2);
matrix ([[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5]])
```

On a donc

$$J_5^2 = 5J_5$$

4. On en déduit que $(M^2 + M - I_5)^2 = 5(M^2 + M - I_5)$ c'est à dire que

$$P(M) = 0 \quad \text{avec} \quad P = (X^2 + X - 1)(X^2 + X - 6)$$

5. Toute valeur propre de M est racine de P et donc

$$sp(M) \subset \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 2, -3 \right\}$$

6.

```
> kernel(M-diag(2,2,2,2,2));
{vector ([1,1,1,1,1])}
> kernel(M+diag(3,3,3,3,3));
{}
```

On a donc

$$sp(M) \cap \mathbb{Z} = \{2\} \quad \text{et} \quad \ker(M - 2I_5) = Vect((1, 1, 1, 1, 1))$$

Partie II.

1.1. On a, M étant symétrique,

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{j,k}$$

1.2. On suppose $i \neq j$.

- Si $m_{i,j} = 1$ alors tous les termes de la somme sont nuls et $a_{i,j} = 0$.
- Si $m_{i,j} = 0$ il y a un unique terme dans la somme qui vaut 1 et les autres sont nuls. On a donc $a_{i,j} = 1$.

On peut donc écrire que

$$\forall i \neq j, a_{i,j} = 1 - m_{i,j}$$

1.3. On a aussi $a_{i,i} = \sum_{k=1}^n m_{i,k}^2 = \delta$. On en déduit que

$$M^2 + M = J_n + (\delta - 1)I_n$$

2.1. $Im(\phi)$ est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de J_n et donc

$$Im(\phi) = Vect(v)$$

2.2. D'après la question 1,

$$(f \circ f)(u) = \phi(u) + (\delta - 1)u - f(u)$$

Comme $f(u) = \delta u$ et $\phi(u) = nv$, on a donc $(f \circ f)(u) = nv - u$. Par ailleurs, $(f \circ f)(u) = \delta^2 u$ et ainsi

$$u = \frac{n}{\delta^2 + 1}v$$

2.3. On vient de voir que $\ker(f - \delta id) \subset Vect(v)$. Réciproquement les coordonnées de $f(v)$ sont les sommes par ligne des coefficients de M et donc $f(v) = \delta v$. Ainsi

$$\ker(f - \delta id) = Vect(v)$$

ce qui montre (comme $v \neq 0$) que δ est valeur propre de f (et donne le sous-espace propre correspondant).

2.4. En appliquant la relation de 2.2 avec $u = v$, on obtient $(\delta^2 + \delta)v = nv + (\delta - 1)v$. Comme $v \neq 0$, on a donc

$$\delta^2 + 1 = n$$

3.1. M est la matrice de f dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Comme M est symétrique, f est donc autoadjoint. Il existe donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour f (théorème spectral).

3.2. Les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale. $\ker(f - \lambda id)$ est donc orthogonal à $\ker(f - \delta id)$ ($\delta \neq \lambda$) et u est donc orthogonal à v ce qui s'écrit (la base canonique étant orthonormée)

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

- 3.3. De la question précédente, on déduit que $\phi(u) = 0$ et avec le début la question 2.2 on a donc $(\lambda^2 + \lambda)u = (\delta - 1)u$. Comme u est non nul (c'est un vecteur propre) on a donc

$$\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0$$

- 3.4. f étant diagonalisable, la trace de M est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Si a est l'unique valeur propre différente de δ (qui, elle, est simple), elle est de multiplicité $n - 1$ et donc

$$(n - 1)a + \delta = \text{Tr}(M) = 0$$

On a donc $a = -\frac{\delta}{n-1} \in [-1, 0]$. Si on note $P(x) = x^2 + x + 1 - \delta$, on a $P(0) = P(-1) = 1 - \delta < 0$. 0 et -1 sont donc entre les racines de P qui sont a et b . On a donc $a, b \notin [-1, 0]$ et on obtient une contradiction.

- 4.1. On sait que $a + b = -1$ et $ab = 1 - \delta$. On en déduit que

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 1 - 4(1 - \delta) = 4\delta - 3$$

- 4.2. On a $ar + sb + \delta = \text{Tr}(f) = 0$ (voir plus haut) et donc $ar + sb = -\delta$. Par ailleurs $r + s + 1 = n$ (somme des multiplicité qui vaut n) et donc $r + s = n - 1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & n - 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4.3. En prenant le déterminant, on en déduit que

$$(r - s)(a - b) = n - 1 - 2\delta$$

- 4.4. Comme $a \neq b$ (question II.3), $r = s$ si et seulement si $(r - s)(a - b) = 0$. Avec la question précédente, cette condition s'écrit $n - 1 - 2\delta = 0$ ou encore $\delta = \frac{n-1}{2}$. Comme $r + s + 1 = n$, on a alors $r = s = \frac{n-1}{2}$.

- 5.1. Si $a - b \notin \mathbb{Q}$ alors si $n - 1 - 2\delta \neq 0$, $r - s = \frac{n-1-2\delta}{a-b} \notin \mathbb{Q}$ (par l'absurde par exemple). Ainsi $\delta = \frac{n-1}{2}$ et $r = s = \frac{n-1}{2}$. Comme $n = \delta^2 + 1$, on en déduit que $n^2 - 6n + 5 = 0$ et donc $n = 2$ ou $n = 5$ ou $n = 1$. Comme $n \geq 3$, on a donc

$$n = 5$$

- 5.2. Dans ce cas a et b sont racines de $x^2 + x - 1 = 0$ et donc

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

a et b sont de multiplicité 2 et $\delta = 2$ est de multiplicité 1. M est semblable à

$$\text{diag} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, 2 \right)$$

- 6.1. $(a - b)^2$ est un entier et donc m^2/q^2 est entier. Si p est un nombre premier qui divise q alors il divise q^2 . $\frac{m^2}{p} = \frac{m^2 q^2}{q^2 p}$ est donc entier. p divise donc m^2 et comme p est premier, il divise m . Comme on peut supposer m et q sans facteur premier commun (quitte à simplifier), on obtient une contradiction si q possède des facteurs premiers. Ainsi, $q = 1$ et $a - b \in \mathbb{N}$.

- 6.2. $(a-b)^2 = 4\delta - 3 \geq 1$ est impair et $a-b$ est donc aussi impair plus grand que 1. Si $a-b = 1$ alors comme $a+b = -1$ on a $a = 0$ et $b = -1$ ce qui est exclu (a et b sont racines de $x^2 + x + 1 - \delta$ et on aurait $\delta = 1$ ce qui est exclu). En notant $a-b = 2p-1$, on a $(2p+1)^2 = 4\delta - 3$ et donc

$$\delta = \frac{(2p+1)^2 + 3}{4}$$

Par ailleurs, $a+b = -1$ et donc

$$a = p \quad \text{et} \quad b = -p-1$$

- 6.3. De $(r-s)(a-b) = n-1-2\delta$, on déduit que c divise

$$n-1-2\delta = \delta^2 - 2\delta = (p^2 + p + 1)(p^2 + p - 1) = \frac{1}{16}(c^2 + 3)(c^2 - 5)$$

A fortiori, c divise $(c^2 + 3)(c^2 - 5) = c^4 - 2c^2 - 15$. Comme c divise $c^4 - 2c^2$, il divise donc aussi 15. Les entiers impairs ≥ 3 qui divisent 15 sont 3, 5 et 15.

- 6.4. On connaît tout en fonction de p (en particulier $\delta = p^2 + p + 1$, $n = \delta^2 + 1$, $r + s = n - 1$ et $r - s = (n - 1 - 2\delta)/c$). On obtient le tableau suivant

c	δ	n	a	b	r	s
3	3	10	1	-2	5	4
5	7	50	2	-3	28	21
15	57	3250	7	-8	1729	1520

Partie III.

- Pour raison de symétrie, on peut supposer $\alpha < \beta$. Si $a < b$ et $e_\alpha + e_\beta = e_a + e_b$ alors (par exemple par l'aburde) $\alpha = a$ et $\beta = b$ car la famille des (e_k) est libre. On a donc $\binom{5}{2} = 10$ choix qui donneront des vecteurs distincts deux à deux.
- ψ transforme une base orthonormée en base orthonormée. C'est donc un automorphisme orthogonal et il conserve le produit scalaire. En particulier, on a

$$\forall i, j \in [1, 10], (u_i | u_j) = (\psi(u_i) | \psi(u_j))$$

- 3.1. Il existe $a < b$ tels que $u_i = e_a + e_b$ et alors

$$(u_i | u_i) = (e_a | e_a) + 2(e_a | e_b) + (e_b | e_b) = 2$$

- 3.2. On utilise les notations de l'énoncé.

$$(u_i | u_j) = (e_\alpha | e_\alpha) + (e_\alpha | e_\gamma) + (e_\beta | e_\alpha) + (e_\beta | e_\gamma) = 1$$

- 3.3. On a cette fois $(u_i | u_j) = 0$ (quatre produits scalaires nuls).

4. La matrice

$$M = J_n - A + I_n$$

a des coefficients diagonaux nuls, elle est symétrique, elle ne comporte que des zéros et des 1. Plus précisément, fixons i . u_i s'écrit $e_a + e_b$. Si $u_j = e_\alpha + e_\beta$ alors $M_{i,j} = 1$ ssi les quatre indices a, b, α, β sont distincts. Il y a donc $\binom{3}{2} = 3$ tels coefficients. On est dans le cas $\delta = 3$ (ce qui correspond bien à $n = \delta^2 + 1 = 10$).

Il reste à vérifier la propriété (4). Soit $i \neq j$ alors $M_{i,j} = 0$ si et seulement si il existe α, β, γ avec $\beta \neq \gamma$ tels que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$.

Si ceci a lieu alors $M_{i,k} = M_{j,k} = 1$ où $u_k = e_c + e_d$ tels que $\{\alpha, \beta, \gamma, c, d\} = [1, 5]$.

Réciproquement, si un tel k existe alors $u_k = e_c + e_d$ et u_j et u_i n'utilisent pas e_c ni e_d . Ils ont donc un e_α commun dans leur définition (et seulement un car $i \neq j$) et $M_{i,j} = 0$.

M vérifie donc (P).