

MINES PSI 2007 un corrigé

1 Préliminaires.

1. Soient $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{N}_{r,m}(\mathbb{K})$; on note $A = MN \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On a (avec l'inégalité triangulaire)

$$\forall i \in [1..n], \sum_{j=1}^m |A(i, j)| = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k)N(k, j) \right| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r |M(i, k)| \cdot |N(k, j)|$$

Les sommes étant indépendantes on peut les intervertir et on obtient

$$\forall i \in [1..n], \sum_{j=1}^m |A(i, j)| \leq \sum_{k=1}^r \left(|M(i, k)| \sum_{j=1}^m |N(k, j)| \right)$$

Par définition de $\|\cdot\|$, $\sum_{j=1}^m |N(k, j)|$ est plus petit que $\|N\|$ pour tout k . Multiplier par $|M(i, k)| \geq 0$ ne change pas le sens de l'inégalité et ainsi

$$\forall i \in [1..n], \sum_{j=1}^m |A(i, j)| \leq \|N\| \sum_{k=1}^r |M(i, k)|$$

Par définition de $\|\cdot\|$, $\sum_{k=1}^r |M(i, k)|$ est plus petit que $\|M\|$ pour tout i . Multiplier par $\|N\| \geq 0$ ne change pas le sens de l'inégalité et finalement

$$\forall i \in [1..n], \sum_{j=1}^m |A(i, j)| \leq \|M\| \|N\|$$

Ceci étant vrai pour tout i , un passage au maximum donne

$$\|A\| = \|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$$

2. P étant stochastique $PJ_n = J_n$ ce qui signifie que la somme des éléments de chaque ligne de P vaut 1. Ces éléments étant positifs, on a donc

$$\forall i \in [1..n], \sum_{j=1}^n |P(i, j)| = \sum_{j=1}^n P(i, j) = 1$$

En passant au maximum, on a donc

$$\|P\| = 1$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. On a alors $ABJ_n = AJ_n = J_n$ et donc AB est stochastique. On montre alors par récurrence que si P est stochastique alors, P^k est stochastique pour tout $k \geq 1$.

- C'est vrai par hypothèse si $k = 1$.
- Soit $k \geq 1$ tel que P^k soit stochastique. On a alors $P^{k+1} = P^k P$ qui est stochastique comme produit de deux telles matrices.

2 Pseudo-inverse.

4. On a toujours $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$.

Supposons que A possède un pseudo-inverse A' . La propriété (2) donne alors, compte-tenu de $AA' = A'A$, $A = A^2A'$ et donc $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a^2)$.

On a donc l'égalité des images de a et de a^2 et ainsi

$$\text{rang}(a^2) = \text{rang}(a)$$

5. Comme $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$ (toujours vrai), l'hypothèse d'égalité des rangs de a et a^2 donne en fait l'égalité des images.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $a(x) \in \text{Im}(a) = \text{Im}(a^2)$ et il existe donc z tel que $a(x) = a^2(z)$. On a alors $a(x - a(z)) = 0$ c'est à dire $x - a(z) \in \text{Ker}(a)$. Finalement,

$$x = (x - a(z)) + a(z) \in \text{Ker}(a) + \text{Im}(a)$$

On a prouvé que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(a) + \text{Im}(a)$ (inclusion réciproque immédiate...). Or, par théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(a)) + \dim(\text{Im}(a)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ et donc

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(a) \oplus \text{Im}(a)$$

6. D'après le théorème du rang, a induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\text{Ker}(a)$ dans $\text{Im}(a)$. Ici, $\text{Im}(a)$ est lui même un supplémentaire de $\text{Ker}(a)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base obtenue en concaténant une base de $\text{Im}(a)$ et une base de $\text{Ker}(a)$. Ces deux sous-espaces étant stables par a (on vient de le voir pour l'image et c'est évident pour le noyau),

la matrice de a dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit (par blocs) $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B et C sont les matrices des restrictions de a à $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ (dans le bout de base correspondant). La remarque du début de question donne que B est inversible (de taille $r = \dim(\text{Im}(a))$) et, part définition du noyau, $C = 0$.

En notant W la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a donc (formule de changement de bases)

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}, \quad W \in GL_n(\mathbb{R}), \quad B \in GL_r(\mathbb{R})$$

7. On pose

$$A = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Des produits par blocs donnent

$$AA' = A'A = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

$$AA'A = W \begin{pmatrix} BB^{-1}B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W = A$$

$$A'AA' = W \begin{pmatrix} B^{-1}BB^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W = A'$$

et A' est un pseudo-inverse de A .

8. Commençons par les stabilités de $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ par a' .

- Soit $x \in \text{Ker}(a)$; on a (propriété (1)) $a(a'(x)) = a'(a(x)) = a'(0) = 0$ et donc $a'(x) \in \text{Ker}(a)$. Ainsi, $\text{Ker}(a)$ est stable par a' . Notons que (propriété (3))

$$\forall x \in \text{Ker}(a), \quad a'(x) = a'(a(a'(x))) = 0$$

a' agit donc comme l'application nulle sur $\text{Ker}(a)$.

- Soit $x \in \text{Im}(a)$; il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y)$. D'après la propriété (1), $a'(x) = a'(a(y)) = a(a'(y)) \in \text{Im}(a)$. Ainsi, $\text{Im}(a)$ est stable par a' .

Par formule de changement de base, $W^{-1}A'W$ est la matrice de a' dans la base $\mathcal{B}$ de la question

6. Comme dans cette question, cette matrice s'écrit $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ où D et E sont les matrices des restrictions de a' à $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ (dans le bout de base correspondant). Enfin, $E = 0$ puisque a' agit donc comme l'application nulle sur $\text{Ker}(a)$. Finalement,

$$A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

9. D'après la propriété (2) (et en multipliant par A' à droite)

$$(AA')^2 = AA'$$

Ceci montre que $a \circ a'$ est un projecteur.

Les propriétés (2) et (1) indiquent que $A = A'A^2$ et donc $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a')$. De même (3) et (1) indiquent que $\text{Im}(a') \subset \text{Im}(a)$. On a alors

$$\text{Im}(a \circ a') = a(\text{Im}(a')) = a(\text{Im}(a)) = \text{Im}(a)$$

la dernière égalité provenant de la question 6 (a réalise une bijection de $\text{Im}(a)$ dans lui même). Par théorème du rang, $\text{Ker}(a \circ a')$ et $\text{Ker}(a)$ ont alors même dimension. Or, d'après ce qui précède, $\forall x \in \text{Ker}(a)$, $a \circ a'(x) = 0$ et donc $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a \circ a')$. Par dimension cette inclusion est une égalité.

$a \circ a'$ est alors la projection sur $\text{Im}(a \circ a') = \text{Im}(a)$ de direction $\text{Ker}(a \circ a') = \text{Ker}(a)$.

$W^{-1}AA'W$ est la matrice de $a \circ a'$ dans une base adaptée à $\text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$ et ainsi

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Un produit par blocs donne aussi

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} BD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $D = B^{-1}$. A' est donc parfaitement déterminée à partir de A et on a unicité (si existence) d'un pseudo-inverse.

3 Calcul de X_∞ .

Remarque : l'énoncé définit u_c comme l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que

$$u_c(x + iy) = u(x) + iu(y)$$

Ceci n'est pas tout à fait clair car $\mathbb{C}^n$ peut être considéré comme $\mathbb{C}$ -espace ou comme $\mathbb{R}$ -espace.

Si on le considère comme un $\mathbb{R}$ -espace, la linéarité est immédiate (elle découle de celle de u).

Si on le considère comme un $\mathbb{C}$ -espace, il y a un calcul à faire pour vérifier la linéarité. Soit $z \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ un complexe (avec λ_1, λ_2 réels). On peut décomposer de façon unique z sous la forme $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$ et alors

$$u_c(\lambda z) = u_c((\lambda_1 x - \lambda_2 y) + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)) = u((\lambda_1 x - \lambda_2 y)) + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)$$

On utilise alors la linéarité de u puis un nouveau calcul "dans l'autre sens" pour obtenir

$$u_c(\lambda z) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(u(x) + iu(y)) = \lambda u_c(z)$$

De façon plus simple, on a aussi $u_c(z + z') = u_c(z) + u_c(z')$. Finalement, u_c est aussi $\mathbb{C}$ -linéaire.

C'est cette dernière interprétation que l'on choisira dans la suite.

11. On a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, a_c^2(x + iy) = a_c(a(x) + ia(y)) = a^2(x) + ia^2(y) = (a^2)_c(x + iy)$$

On a donc

$$a_c \circ a_c = (a^2)_c$$

12. Dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, la matrice de u_c est A (formellement, les bases canoniques du $\mathbb{C}$ -espace $\mathbb{C}^n$ et du $\mathbb{R}$ -espace $\mathbb{R}^n$ sont les mêmes...). En nous invitant à considérer a_c et non a , l'énoncé semble nous inciter à considérer A comme une matrice complexe. En tant que matrice complexe, A est trigonalisable. Les valeurs propres de A sont les $1 - \lambda$ où λ est valeur propre de P . Comme P admet 1 comme valeur propre simple (en vertu du théorème admis par l'énoncé), A admet 0 comme valeur propre simple. Quitte à permuter les vecteurs d'une base de trigonalisation, on trouve une base $\mathcal{C}$ telle que

$$\text{Mat}(a_c, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où T est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale et donc une matrice inversible. a_c est alors de rang $n - 1$ et il en est de même de a_c^2 puisque

$$\text{Mat}(a_c^2, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & T^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$(*) : \text{rang}(a_c) = \text{rang}(a_c^2) = n - 1$$

Comme $\text{Im}(a_c^2) \subset \text{Im}(a_c)$, par dimension, on a

$$a_c^2(\mathbb{C}^n) = \text{Im}(a_c^2) = \text{Im}(a_c) = a_c(\mathbb{C}^n)$$

13. Le rang d'un endomorphisme étant celui d'une matrice le représentant, la relation $(*)$ donne $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) = n - 1$ et donc

$$\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2) = n - 1$$

14. En écrivant que $C = I_n - (I_n - C)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j \right) C = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j \right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^{j+1} \right)$$

Un télescopage apparaît et ceci se simplifie en

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j \right) C = (I_n - C)^0 - (I_n - C)^k = I_n - (I_n - C)^k$$

En multipliant par C^{-1} à droite, on obtient finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j = \left(I_n - (I_n - C)^k \right) C^{-1}$$

15. On procède par récurrence sur k .

- On a

$$(I_n - P)A' + (I_n - AA') = AA' + I_n - AA' = I_n = \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

La relation proposée par l'énoncé est vraie au rang $k = 1$.

- Supposons la relation vraie jusqu'à un rang $k \geq 1$. On a alors

$$\sum_{j=0}^k P^j = I_n + P \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n + P(I_n - P^k)A' + kP(I_n - AA')$$

Comme $P = I_n - A$, on a aussi

$$P(I_n - P^k)A' = (P - P^{k+1})A' = (I_n - P^{k+1})A' - AA'$$

$$P(I_n - AA') = I_n - AA' - A + AAA' = I_n - AA' \quad \text{car } AAA' = AA'A = A$$

En regroupant ces égalités, on a donc

$$\sum_{j=0}^k P^j = (I_n - P^{k+1})A' + (k+1)(I_n - AA')$$

ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.

16. D'après la question précédente,

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j - (I_n - AA') = \frac{1}{k} (I_n - P^k)A'$$

En passant à la norme, et avec les préliminaires,

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j - (I_n - AA') \right\| \leq \frac{1}{k} \left(\|I_n\| + \|P^k\| \|A'\| \right) = \frac{1 + \|A'\|}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc prouvé que, au sens de $\|\cdot\|$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$$

17. L'application $M \mapsto MJ_n$ est continue (linéaire en dimension finie). On a donc

$$(I_n - AA')J_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j J_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (kJ_n) = J_n$$

et $I_n - AA'$ est stochastique.

Par ailleurs, $(I_n - AA')A = A - AA'A = A - A = 0$.

18. D'après la partie II, AA' est la matrice de la projection sur $\text{Im}(A)$ de direction $\text{Ker}(A)$. $I_n - AA'$ est donc la matrice de la projection sur $\text{Ker}(A)$ de direction $\text{Im}(A)$. En particulier, toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont colinéaires. Comme $I_n - AA'$ est stochastique, le coefficient de proportionnalité entre les lignes vaut 1 et toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont égales et égale à un élément L de $\mathcal{K}_n$: $I_n - AA' = J_n L$.

Par ailleurs, $M \mapsto X_\infty$ étant continue, on a

$$X_\infty(I_n - AA') = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} X_\infty P^j$$

Par définition, $X_\infty P = X_\infty$ et, par récurrence immédiate, $\forall j, X_\infty P^j = X_\infty$. On a ainsi

$$X_\infty(I_n - AA') = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} X_\infty = X_\infty$$

Compte-tenu de l'expression de $I_n - AA'$, ceci donne

$$X_\infty J_n L = X_\infty$$

X_∞ étant stochastique, $X_\infty J_n = 1$ et donc $L = X_\infty$. On a alors prouvé que

$$I_n - AA' = J_n L = J_n X_\infty$$