Mr : HAMANI Ahmed

Fonction caractéristique .

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

L'indépendance des ε_k entraine celle des $exp\left(\frac{it\varepsilon_k}{2^k}\right)$, donc

$$\Phi_{X_n}(t) = E(e^{itX_n}) = E\left(exp\left(it\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n} exp\left(\frac{it\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(exp\left(\frac{it\varepsilon_k}{2^k}\right)\right).$$

Or $E\left(exp\left(\frac{it\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = exp\left(\frac{it}{2^k}\right)P(\varepsilon_k = 1) + exp\left(\frac{-it}{2^k}\right)P(\varepsilon_k = -1) =$

$= \frac{1}{2}\left(exp\left(\frac{it}{2^k}\right) + exp\left(\frac{-it}{2^k}\right)\right) = cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$,

donc $Phi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$.

Q2. On a les égalités suivantes

$cos\left(\frac{t}{2^n}\right).sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \frac{1}{2}sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)$

$cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right).sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}sin\left(\frac{t}{2^{n-2}}\right)$

.

.

$cos\left(\frac{t}{2}\right).sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}sin(t)$

Avec le produit des égalités précédentes, on obtient

$sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{sin(t)}{2^n}$. c'est à dire $sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{sin(t)}{2^n}$

Q3. • $\Phi_{X_n}(0) = E(1) = 1$ et $\forall t \neq 0$, $sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{t}{2^n}$, donc $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{sin(t)}{t}$.

On conclut que $(Phi_{X_n})_n$ converge simplement vers $sinc$.

Q4. $sinc$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{t\longrightarrow 0} sinc(t) = 1 = sinc(0)$, donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\Phi_{X_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q5. $X_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{2^n} \ / \ k \in [[-(2^n-1), 2^n-1]]\right\}$, donc $\Phi_{X_n}(t) = \sum_{k=-(2^n-1)}^{2^n-1} exp\left(it\frac{k}{2^n}\right)P(X_n = \frac{k}{2^n})$, en intégrant entre 0 et $2^{n+1}\pi$, on aura pour tout $j \in [[-(2^n-1), 2^n-1]]$,

$$\frac{1}{2^{n+1}\pi}\int_0^{2^{n+1}\pi}\Phi_{X_n}(t)exp(-i\frac{jt}{2^n})dt = \sum_{k=-(2^n-1)}^{2^n-1} P(X_n = \frac{k}{2^n})I_k \text{ où } I_k = \frac{1}{2^{n+1}\pi}\int_0^{2^{n+1}\pi} exp\left(i\frac{t(k-j)}{2^n}\right)dt,$$

or $I_k = \delta_{j,k}$, donc $\frac{1}{2^{n+1}\pi}\int_0^{2^{n+1}\pi}\Phi_{X_n}(t)exp(-i\frac{jt}{2^n})dt = P\left(X_n = \frac{k}{2^n}\right)$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{-X_n}(t) = E\left(exp(-itX_n)\right) = \Phi_{X_n}(-t)$ et grâce à la question $Q2.$, la parité de Φ_{X_n} donne $\Phi_{-X_n} = \Phi_{X_n}$, ce qui donne d'après le résultat précédent,

$\forall k \in [[-(2^n-1), 2^n-1]]$, $P\left(-X_n = \frac{k}{2^n}\right) = P\left(X_n = \frac{k}{2^n}\right)$, c'est à dire $-X_n$ et X_n ont même loi.

Q6. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = E\left(\frac{exp(itX_n) + exp(-itX_n)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(exp(itX_n)) + E(exp(-itX_n))\right)$, or $-X_n$ et X_n ont même loi, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \Phi_{X_n}(t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} sinc(t)$.

On peut raisonner de la façon suivante :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = Re\left(\Phi_{X_n}(t)\right)$, or l'application $\begin{array}{rccc} Re: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & Re(z) \end{array}$ est $1-$lipchitziènne, donc continue, ce qui donne par passage à la limite $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\varphi_n(t) = Re(sinc(t)) = sinc(t)$.

Q7. Considérons la suite $t_n = 2^{n+1}\pi$, alors $\varphi_n(t) = \Phi_{X_n}(t_n) = \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t_n}{2^n}\right) = 1$ et $sinc(t_n) = 0$, donc $|\varphi_n(t_n) - sinc(t_n)| = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui entraine que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

II Écriture binaire .

Q8. Pour tout $j \in [[1,n]]$, $x_j \in \{0,1\}$, donc $0 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \leq \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2^n - 1$.

Donc $Im(\phi_n) \subset [[0, 2^n - 1]]$.

Q9. $Im(\phi_n) = \{\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \ / \ (x_j)_{1\leq j \leq n} \in \{0,1\}^n\} = A_n$.

Q10. $\phi_n(0,...,0) = 0$, donc $0 \in Im(\phi_n)$.

Supposons que pour un certain $1 \leq k < 2^n - 1$, $k \in Im(\phi_n)$, donc $k = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ où $x_j \in \{0,1\}$.

- Si $x_n = 0$, alors $k + 1 = \sum_{j=1}^{n-1} x_j 2^{n-j} + 2^{n-n} \in Im(\phi_n)$
- Si $x_n = 1$, On considère l'ensemble $\{j \ / \ x_j = 0\}$ qui est une partie de $\mathbb{N}$, non vide grâce à l'hypothèse $k < 2^n - 1$ et majoré, soit $p = \max\{j \ / \ x_j = 0\}$, alors $k = \sum_{j=1}^{p-1} x_j 2^{n-j} + \sum_{j=p+1}^{n} 2^{n-j} = \sum_{j=1}^{p-1} x_j 2^{n-j} + 2^{n-p} - 1$,

donc $k + 1 = \sum_{j=1}^{p-1} x_j 2^{n-j} + 2^{n-p} \in Im(\phi_n)$.

Ce qui achève la récurrence.

Q11. Les questions $Q8$. et $Q10$. assurent que $Im(\phi_n) = [[0, 2^n - 1]]$, donc ϕ_n est surjective, et puisque $Card(\{0,1\}^n) = 2^n = Card(2^n - 1)$, ϕ_n devient une bijection.

Q12. • Soit $x \in D_n$, alors $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} + \frac{0}{2^{n+1}} \in D_{n+1}$, donc $D_n \subset D_{n+1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$, alors $0 \leq x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^n}$, donc $D_n \subset [0,1[$ et par suite $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n \subset [0,1[$.

Q13. Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $[2^n x] \leq 2^n x < [2^n x] + 1$, en divisant par 2^n, on obtient $\pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$.

Q14. On a la relation $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$.

Soit $x \in [0,1[$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [[1,k]]$, alors $\frac{d_j(x)}{2^j} = \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)$ donc par téléscopie, on obtient $\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} (\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)) = \pi_k(x) - \pi_0(x)$, or $x \in [0,1[$, donc $\pi_0(x) = [x] = 0$, ce qui donne la formule $\forall x \in [0,1[, \forall k \in \mathbb{N}$, $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j(x)}{2^j}$.

Q15. Soit $(x,j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{2^j} < \pi_j(x) \leq x$ et $x - \frac{1}{2^{j-1}} < \pi_{j-1}(x) \leq x$, donc $-\frac{1}{2^j} < \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x) < \frac{1}{2^{j-1}}$, ce qui donne en multipliant par 2^i , l'inégalité $-1 < d_j(x) < 2$, or $d_j(x) \in \mathbb{N}$, donc $d_j(x) \in \{0,1\}$.

Q16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Longrightarrow$ Soit $x \in D_n$, alors $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ où $(x_j) \in \{0,1\}^n$, donc $2^n = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} = \Phi_n(x_1, ..., x_n)$ et par la question $Q8.$, $2^n x \in [[0, 2^n - 1]]$.

$\Longleftarrow$ Soit x tel que $2^n x \in [[0, 2^n - 1]]$. Φ_n étant surjective, donc $\exists (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$ tel que $2^n x = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$, c'est à dire $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in D_n$.

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \Psi_n = \Phi_n$, donc Ψ_n est bijective comme Φ_n.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in D_n$ et $k \in \mathbb{N}$.

D'après la question $Q14.$, $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}$, avec $d_j(x) = [2^j x] - 2[2^{j-1}x]$

Soit $j \in [[1, k]]$.

• Si $j \geq n+1$, alors $j-1 \geq n$, donc $2^j x \in \mathbb{N}$ et $2^{j-1}x \in \mathbb{N}$ et par suite $d_j(x) = [2^j x] - 2[2^{j-1}x] = 0$.

• Si $j \leq n$.

$2^j x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{2^i} 2^j = \sum_{i=1}^{j} x_i 2^{j-i} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-j}}$ et puisque $\sum_{i=1}^{j} x_i 2^{j-i} \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \sum_{i=j+1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-j}} \leq \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2^{i-j}} = 1 - \frac{1}{2^{n-j}} < 1$, donc

$[2^j x] = \sum_{i=1}^{j} x_i 2^{j-i}$, de même $[2^{j-1}x] = \sum_{i=1}^{j-1} x_i 2^{j-i-1}$, ce qui donne $d_j(x) = x_j$.

On conclut que $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$.

III Développement dyadique, loi et décomposition .

Q19. U_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc $0 \leq Y_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$, donc $(Y_n \in [0, 1[)$ est un événement sûre et par suite $P(Y_n \in [0, 1[) = 1$.

Q20. D'après la question $Q16.$, $Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{2^n} \ / \ k \in [[0, 2^n - 1]] \right\} = D_n$.

Soit $x \in D_n$ et posons $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = \frac{k}{2^n}$ où $k \in [[0, 2^n - 1]]$

$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = \sum_{j=0}^{k} P\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right)$, or par bijection de Ψ_n, on a

$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\Psi_n^{-1}(Y_n) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right) = (U_1 = x_1, ..., U_n = x)$

Les U_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de parmètre $\frac{1}{2}$, donc

$P\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = (P(U_1 = x_1))^n = \frac{1}{2^n}$ et par suite $F_n(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \frac{k+1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}$.

Q21. On garde les mêmes notations de la question précédente, donc $G_n(x) = F_n(x) - P\left(Y_n = \frac{k}{2^n}\right) = F_n(x) - \frac{1}{2^n} = x$.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a montré que $\forall k \in [[0, 2^n - 1]]$, $P\left(Y_n = \frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$

de plus $Card(Y_n(\Omega)) = 2^n$, donc Y_n suit la loi uniforme sur D_n.

Q23. X_n est à valeurs dans D_n, donc d'après la question $Q17$, $X_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{2^j}$ où V_j à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Pour tout $x_1, ...x_n \in \{0, 1\}$, $\exists k \in [[0, 2^n - 1]]$ tel que $\frac{k}{2^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$, donc

$P(V_1 = x_1, ..., V_n = x_n) = P(X_n = \frac{k}{2^n})$,or U_n suit la loi uniforme sur D_n qui est de cardinal 2^n, donc cette dernière probabilité vaut $\frac{1}{2^n}$.

Or pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $Card(X_i = x_i) = 2^{n-1}$, donc $P(X_i = x_i) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$et par suite

$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j = x_j)$, on conclut que les X_j sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de parmètre $\frac{1}{2}$.

IV Développement dyadique, étude asymptotique .

Q24. C'est clair que $Y_n \leq Y_{n+1}$, donc on a l'inclusion des événements $(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$ et $(Y_{n+1} < x) \subset (Y_n < x)$ et par suite $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$ et $G_{n+1}(x) \leq G_n(x)$, ce qui entraine la croissance des suites.

Q25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les deux suites précédentes sont décroissantes minorées par 0, donc elles convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

Q26. • Si $x = 1$, $Y_n(\Omega) \subset [[0, 1 - \dfrac{1}{2^n}]]$, donc $F_n(1) = G_n(1) = 1$

• Si $x \in D$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_k$, or $\forall n \geq k$, $D_k \subset D_n$, donc $x \in D_n$ et par suite $G_n(x) = x$ et $F_n(x) = x + \dfrac{1}{2^n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$.

Q27. Soit $x \in [0, 1[\setminus D$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$[0, 1[= \displaystyle\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, donc $\exists j \in [[0, 2^n - 1]]$ tel que $x \in \left[\dfrac{j}{2^n}, \dfrac{j+1}{2^n}\right[$, or $x \notin D$, donc $x \in \left]\dfrac{j}{2^n}, \dfrac{j+1}{2^n}\right[$, ce qui entraine que $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(Y_n \leq \dfrac{j}{2^n}\right) = F_n\left(\dfrac{j}{2^n}\right)$.

$G_n(x) = P(Y_n < x) = P\left(Y_n \leq \dfrac{j}{2^n}\right) = F_n\left(\dfrac{j}{2^n}\right)$.

$F_n(x) = G_n(x) = \dfrac{j}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}$ et vu l'inégalité $\dfrac{j}{2^n} < x < \dfrac{j+1}{2^n}$, on aura $\dfrac{j}{2^n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$, donc $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} G_n(x) = x$.

Q28. Soit I un intervalle de $[0, 1]$. Posons $H_n(Sup(I)) = \begin{cases} F_n(Sup(I)),\ si\ Sup(I) \in I \\ G_n(Sup(I)\,,si\ Sup(I) \notin I \end{cases}$

et $H_n(inf(I) = \begin{cases} G_n(Inf(I))\,,si\,Inf(I) \in I \\ F_n()Inf(I)\,si\,Inf(I) \notin I \end{cases}$), alors

$P(Y_n \in I) = H_n(Sup(I)) - H_n(Inf(I))$ et passage à la limite en utilisant la question $Q26.$, on aura $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(Y_n \in I) = Sup(I) - Inf(I)$

Q29. $Y_n(\Omega) = \{\dfrac{k}{2^n}\ /\ k \in [[0, 2^n - 1]]\}$, donc Par théorèmede Transfert $E(f(Y_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) P\left(Y_n = \frac{k}{2^n}\right)$,

or $P\left(Y_n = \dfrac{k}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$, donc $E(f(Y_n)) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$

Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la subdivision régulière sur $[0, 1]$ de pas $\dfrac{1}{2^n}$. La fonction f étant continue, donc $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} E(f(Y_n)) = \int_0^1 f(t)dt$.

Q30. • Si $t = 0$, $E(cos(tX_n)) = E(1) = 1$.

• Si $t \neq 0$. $X_n(\Omega) = \left\{\dfrac{2k+1}{2^n}\ /\ k \in [[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]]\right\}$, la formule de Transfert donne par parité de X_n

$E(cos(tX_n)) = 2 \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cos\left(t\frac{2k+1}{2^n}\right) P\left(X_n = \frac{2k+1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cos\left(t\frac{2k+1}{2^n}\right)$.

Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la fonction $x \longmapsto cos(tx)$ et à la subdivision sur $[0, 1]$

$\sigma = (0 = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = 1)$ avec $a_0 = 0$, $a_k = \dfrac{2k-1}{2^n}$ pour $k \in \{1, 3, 5, ..., 2^n - 1\}$ et $a_n = 1$,

donc $E(cos(tX_n)) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 cos(tx)dx = \frac{sin(t)}{t}$.

Q31. La fonction $t \longrightarrow \dfrac{t-1}{ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$ prolongeable en 0 et 1, donc intégrable sur $]0, 1[$.

D'une part, $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n})dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{2^n-1} t^{\frac{k}{2^n}} P\left(Y_n = \frac{k}{2^n}\right) dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^1 t^{\frac{k}{2^n}} dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$

avec $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, donc $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n})dt$ est une somme de Riemann associée à f est à la subdivision réguli-re de $[0, 1]$ de pas $\dfrac{1}{2^n}$, et par suite

$\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 E(t^{Y_n}) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = ln(2)$.

D'autre part, d'après le résultat de la question $Q29.$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} E(t^{Y_n}) = \int_0^1 t^x dx = \int_0^1 e^{xln(t)}dx = \dfrac{t-1}{ln(t)}$.

Or $\forall t \in]0,1]$ $0 \leq t^{Y_n} \leq 1$, donc $0 \leq E(t^{Y_n}) \leq 1$, ce qui donne par theorème de la convergence dominée, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 E(t^{Y_n})dt = \int_0^1 \dfrac{t-1}{ln(t)}dt$.

On conclut par unicité de la limite $\int_0^1 \dfrac{t-1}{ln(t)}dt = ln(2)$.

V Dénombrabilité .

Q32. D_n est dénombrable comme ensemble en bijection avec $\{0,1\}^n$ qui est fini de cardinal 2^n et par suite $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

Q33. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est bijective et $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x \notin f(x)\}$ est élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc $\exists x_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_0) = A$, ce qui donne l'équivalence absurde

$x_0 \notin A \iff x_0 \in f(x_0) \iff x_0 \in A$.

Q34. • Injectivité :

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\Phi(A) = \Phi(B)$, alors $1_A = 1_B$, donc

$x \in A \iff 1_A(x) = 1_B(x) = 1 \iff x \in B$, c'est à dire $A = B$.

• Surjectivité :

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$ une suite de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n = 1\}$,

alors $C_{\mathbb{N}}^A = \{n \in \mathbb{N} \;\; x_n = 0\}$, donc

$n \in A$ si et seulement si $f(n) = 1$ c'est à dire $f = 1_A$.

Q35. • Définition :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{x_n}{2^{n+1}} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$, donc par comparaison $\sum\limits_n \dfrac{x_n}{2^{n+1}}$ converge. De plus $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x_n}{2^{n+1}} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 1$, donc $\Psi(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \subset [0,1]$, ce qui assure la définition de Ψ.

• Surjectivité :

- Si $x = 1$, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = \Psi((1))$.

- Si $x \in [0,1[$, D'après $Q14$ et $Q15$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{d_j(x)}{2^j}$ où $d_j(x) \in \{0,1\}$ et d'après la question $Q13$, $\pi_n(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$, donc

$x = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{d_j(x)}{2^j} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_{n+1}(x)}{2^{n+1}} = \Psi((x_n))$ où $x_n = d_{n+1}(x) \in \{0,1\}$.

• Injectivité :

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$, donc avec $x_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ et $y_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$, alors $\Psi((x_n)_n) = \Psi((y_n)_n) = \dfrac{1}{2}$, mais $((x_n)) \neq ((y_n))$.

On conclut la non injectivité de Ψ.

Q36. • Définition :

Soit (x_n) une suite de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors $\Psi((x_n)) \in [0,1]$ et $\Psi((x_n)) = 1$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1$ si et seulement si $\Lambda((x_n)) = \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\Lambda((x_n)) \in [0,1[$.

• Injectivité :

On va d'abord faire quelques remarques.

Fixons une suite (x_n) de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,alors

$Rem:\ 1$ Si $\Lambda((x_n)) = \dfrac{\Psi((x_n))}{2}$, alors $\Psi((x_n)) = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} + \sum\limits_{j=p+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{j+1}} = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} + \dfrac{1}{2^{p+1}} \in D_{p+1}$, donc $\Lambda((x_n)) \in D_{p+2}$.

$Rem:\ 2$ Si $\Lambda((x_n)) = \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2}$, alors $\Psi((x_n)) = \sum\limits_{j=0}^{p} \dfrac{x_j}{2^{j+1}}$ avec $x_p \neq 0$, donc

$\Lambda((x_n)) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \dfrac{x_j}{2^{j+2}} \in D_{p+2}$.

$*$ $\Lambda((x_n)) = 0$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$.

Soit donc (x_n), (y_n) deux suites non nulles de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $\Lambda((x_n)) = \Lambda((y_n))$.

On va montrer que ceci exige que $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n))$. En effet

- Si $\Lambda((x_n)) = \Psi((x_n))$, et $\Lambda((y_n)) = \dfrac{\Psi((y_n))}{2}$ ou $\Lambda((y_n)) = \dfrac{1+\Psi((y_n))}{2}$, alors $\Lambda((x_n)) \notin D$ et d'après les deux remarques précédentes $\Lambda((y_n)) \in D$, donc on ne peut pas avoir $\Lambda((x_n)) = \Lambda((y_n))$.

- Si $\Lambda((x_n)) = \dfrac{\Psi((x_n))}{2}$ et $\Lambda((y_n)) = \dfrac{1+\Psi((y_n))}{2}$, alors si $\Lambda((x_n)) = \Lambda((y_n))$ on aura $\Psi((x_n)) = 1+\Psi((y_n))$, ce qui exige $\Psi((y_n)) = 0$, donc (y_n) est nulle et ceci contredit $(y_n) \in D^*$.

En définitive $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n))$.

♣ Cas où $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n)) \in [0,1[\backslash D$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_n) \neq (y_n)$ et soit $p = \min\{j \in \mathbb{N} \ / \ x_j \neq y_j\}$, alors $x_j - y_j = 0$ pour tout $j \leq p-1$ et $x_p \neq y_p$, on prend pour fixer les idées $x_p = 1$ et $y_p = 0$, donc l'égalité $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n))$ s'écrit $\dfrac{1}{2^{p+1}} \leq \dfrac{1}{2^{p+1}} + \displaystyle\sum_{j=p+1}^{+\infty} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} = \displaystyle\sum_{j=p+1}^{+\infty} \dfrac{y_j}{2^{j+1}} \leq \dfrac{1}{2^{p+1}}$, ce qui entraine que

$\displaystyle\sum_{j=p+1}^{+\infty} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} = 0$ et $\displaystyle\sum_{j=p+1}^{+\infty} \dfrac{y_j}{2^{j+1}} = \dfrac{1}{2^{p+1}}$, et ceci exige

$\forall j \geq p+1$, $x_i = 0$ et $y_j = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n)) \in [0,1[\backslash D$. On conclut que $(x_n) = (y_n)$.

♣ Cas où $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n)) \in D$. $(D_n)_n$ étant croissante, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Psi((x_n)) = \Psi((y_n)) \in D_p$, et par bijectivité de Ψ_p à la question $Q17$, on obtient $(x_n) = (y_n)$.

On conclut que Λ est injective.

• Surjectivité :

Soit $x \in [0,1[$, alors par surjectivité de Ψ à la question $Q35$, $\exists (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ distincte de la suite constante (1) tel que $x = \Psi((x_n))$.

• Si $x = 0$, alors $\Psi((0)) = 0$.

• Si $x \in [0,1[\backslash D$, alors $x = \Psi((x_n)) = \Lambda((x_n))$.

• Si $x \in D$, soit p le plus petit entiers naturel non nul tel que $x \in D_p$. Deux cas se présentent.

♣ Cas où $x_0 = 1$, alors $x = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} = \dfrac{1+\Psi((y_n))}{2}$ avec $\Psi((y_n)) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} \dfrac{x_j}{2^j}$, donc $\Psi((y_n)) \in D^*$ et stationnaire à 0, ce qui s'écrit $x = \Lambda((y_n))$.

♣ Cas où $x_0 = 0$, alors $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-2} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} + \dfrac{1}{2^p} = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p-2} \dfrac{x_j}{2^j} + \dfrac{1}{2^{p-1}}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p-2} \dfrac{x_j}{2^j} + \sum_{j=p-1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{j+1}}\right) = \dfrac{\Psi(y(_n))}{2}$ où $\Psi((y_n)) \in D$ et stationnaire à 1, donc $x = \Lambda((y_n))$.

On conclut que Λest surjective.

En définitive Λ est bijective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $[0,1[$.

Q37. On vient de montrer que $[0,1[$ est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui d'après la question $Q34$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne peut être dénombrable par la question $Q33$, donc $[0,1[$ n'est pas dénombrable.