Première partie

A. Migration unidirectionnelle

1. m est le taux de migration vers la droite.
Pour un petit laps de temps δt, $mu_n\delta t$ migre de T_n à T_{n+1} et $mu_{n-1}\delta t$ migre de T_{n-1} à T_n d'où :
$\delta u_n = mu_n\,\delta t - mu_{n-1}\delta t$

2.

$$\boxed{v'_n = mv_{n-1}}$$

3. a) Par un raisonnement intuitif : il n'y a pas d'individus sur T_n pour $n \le -1$ à l'instant $t = 0$. Or les migrations se font uniquement de la gauche vers la droite, d'où ces territoires restent vides.
Pour une démonstration mathématique, il faut un bagage que n'ont pas les élèves de BCPST !!
Comme on a affaire à des densités de populations, $\forall n \in \mathbb{Z},\quad u_n \ge 0$ et $v_n \ge 0$

$\forall p \in \mathbb{N},\quad v_{-1}^{(p)} = m^p v_{-1-p} \ge 0 \qquad$ et $\qquad v_{-1}^{(p)}(0) = 0$

v_{-1} est alors absolument monotone et on montre alors qu'elle est égale à sa série de Taylor :

$$v_{-1}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{v_{-1}^{(p)}(0)}{p!} t^p = 0.$$

v_{-1} est nulle et par récurrence , pour tout entier $n \le -1$, v_n et u_n sont nulles

b) et **c)** par récurrence facile :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \in \mathbb{R},\quad v_n(t) = \frac{(mt)^n}{n!}}$$

4) a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \ge 0,\quad u_n(t) = e^{-mt}\dfrac{(mt)^n}{n!}$. On reconnaît une distribution de Poisson de paramètre mt, d'où :
$U(t)=1$ et $R(t) = mt$

b) $\lim u_n(t) = 0,\quad \lim U(t) = 1,\quad \lim R(t) = +\infty$: la population migre vers la droite, il y a conservation de la population totale.

B. Migration bidirectionnelle

5) Même type d'interprétation que dans la partie A, avec des migrations vers la gauche et vers la droite, m_d étant le taux de migration vers la droite, m_g celui vers la gauche.

A l'équilibre : $\dfrac{du_n}{dt} = 0$, d'où $\begin{cases} m_d u_0 = m_g u_1 \\ \forall n \ge 0,\quad m_g u_{n+2} - (m_g + m_d)u_{n+1} + m_d u_n = 0 \end{cases}$

6) a) $m_g = m_d$

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \\ \forall n \ge 0,\quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$$

$\delta_n = u_{n+1} - u_n$. $\forall n,\quad \delta_{n+1} - \delta_n = 0$, d'où $\forall n, \delta_n = \delta_0 = 0$ d'où $\forall n,\quad u_n = u_0$

b) $m_g \neq m_d$

On a affaire à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 - (1+k)r + k = 0$ où $k = \frac{m_d}{m_g}$, dont les zéros sont distincts : 1 et k.

Donc

$\boxed{\exists (c_1, c_2) \in IR^2, \quad \forall n, \quad u_n = c_1 + c_2 k^n}$

7) Si $m_g < m_d$ (le cas $m_g = m_d$ ayant été vu au 6)a)), alors k>1 et si $c_2 \neq 0$, alors $\lim u_n = \infty$, ce qui est impossible . D'où $c_2 = 0$. D'autre part $\sum u_n$ converge, d'où $c_1 = 0$ et $\forall n, \quad u_n = 0$

8. Si $m_g > m_d$, alors k<1. Pour convergence de série, $c_1 = 0$ et U=1, d'où $c_2 = 1 - k$.

On reconnaît une distribution géométrique (à valeurs dans $\mathbb{N}$)de paramètre 1-k, de moyenne $\frac{k}{1-k} = \frac{m_d}{m_g - m_d}$

Deuxième partie : migration à longues distances

A Moyennes de Cesaro

1) Toute suite convergente est bornée :

$$\boxed{\mathcal{L} \subset \mathcal{B}}$$

2) $\mathcal{C}$ n'est pas vide puisqu'il contient les suites constantes . Soit u définie par : $\forall n, \quad u_n = n$, alors $\forall n \geq 1, \quad \bar{u}_n = \frac{n-1}{2} \to +\infty$. La suite u n'appartient pas à $\mathcal{C}$

$$\boxed{\mathcal{C} \neq \varnothing \text{ et } \mathcal{C} \neq \mathcal{R}}$$

3) $\forall j \in \{0,..T-1\}, \quad \forall k \in IN, \quad \bar{u}_{kT+j} = \frac{1}{kT+j} \sum_{i=0}^{kT+j-1} u_i$

Pour j de {1,..,T-1}, $\bar{u}_{kT+j} = \frac{k+1}{kT+j}(u_0 + ... + u_{j-1}) + \frac{k}{kT+j}(u_j + .. + u_{T-1})$.

$\lim_{k\to\infty} \bar{u}_{kT+j} = \bar{u}_T$. Même résultat pour j = 0.

Les T suites extraites (dont les indices donnent tout $\mathbb{N}$), convergent vers la même limite,
donc u appartient à $\mathcal{C}$ et :

$\boxed{\bar{u}_\infty = \bar{u}_T}$

4) a) Soit $k \in \{n^2+1,..,(n+1)^2\}$, $\bar{u}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n}\sqrt{j^2} = \frac{n(n+1)}{2k}$

$k \geq n^2 + 1$, d'où $\bar{u}_k \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2)} = \frac{n+1}{2n}$

$k \leq (n+1)^2$ d'où $\bar{u}_k \geq \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)}$

b) On a alors $-\dfrac{1}{2(n+1)} \leq \overline{u}_k - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2n}$ où $n = E(\sqrt{k}) - 1$

Par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim \overline{u}_k = \frac{1}{2}}$$

C'est donc un exemple de suite appartenant à $\mathcal{C}$ et n'appartenant pas à $\mathcal{B}$, ie

$$\boxed{\mathcal{C} \not\subset \mathcal{B}}$$

5) a) $\Pi_p = \dfrac{1}{q^{2p+2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{q^{2p+2}-1} u_k = \dfrac{1}{q^{2p+2}} \left(\sum_{k=q}^{q^2-1} 1 + \sum_{k=q^3}^{q^4-1} 1 + \ldots + \sum_{k=q^{2p+1}}^{q^{2p+2}-1} 1 \right) = \dfrac{1}{q^{2p+2}} \left[\sum_{n=0}^{p} q^{2n+2} - q^{2n+1} \right]$

$\Pi_p = \dfrac{q-1}{q^{2p+2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{p} q^{2n+1} = \dfrac{q-1}{q^{2p+1}} \dfrac{1-q^{2p+2}}{1-q^2} = \dfrac{q^{2p+2}-1}{q^{2p+1}(1+q)}$

Par un calcul identique $I_p = \dfrac{q^{2p}-1}{q^{2p}(q+1)}$

b) q>1, d'où :

$$\boxed{\lim \Pi_p = \frac{q}{q+1}, \quad \lim I_p = \frac{1}{q+1}}$$

c) Les deux suites extraites convergent vers des limites différentes, d'où ($\overline{u}_n$) diverge, alors que (u_n) est bornée donc on a bien

$$\boxed{\mathcal{B} \not\subset \mathcal{C}}$$

6. Rappelons le programme officiel de BCPST : « un exercice comme celui de la moyenne de Cesaro, par exemple, est totalement hors de l'esprit du programme ».

a) $\lim u_n = 0$

Par définition de la limite : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in IN^*, \quad \forall k \geq N, \quad |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Soit n≥N+1, on a : $\left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=N}^{n-1} u_k \right| \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=N}^{n-1} |u_k| < \dfrac{(n-N)}{n} \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

ii) Notons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u_k$, $\lim \dfrac{A}{n} = 0$, donc $\exists N_1 \in IN^*, \quad \forall n \geq N_1, \quad \left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

iii) Soit $N_2 = Max(N, N_1+1)$, alors $\forall n \geq N_2, \quad |\overline{u}_n| \leq \left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \left| \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=N}^{n-1} u_k \right| < \varepsilon$

On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in IN^*, \quad \forall n \geq N_2, \quad |\overline{u}_n| < \varepsilon$ i.e. :

$$\boxed{\lim \overline{u}_n = 0}$$

Remarque : L'énoncé ne propose pas de valeurs absolues. On montrerait par le même principe qu'à partir d'un certain rang, $\overline{u}_n < \varepsilon$, puis en prenant la suite ($-u_n$), on montrer de même qu'à partir d'un certain rang, $\overline{u}_n > -\varepsilon$.

b) On suppose maintenant que $\lim u_n = \ell$, et on pose $\forall n, \quad v_n = u_n - \ell$

On a : $\forall n \geq 1, \quad \overline{u_n} = \overline{v_n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ell = \overline{v_n} + \ell$.

D'après le a), $\lim \overline{v_n} = 0$ car $\lim v_n = 0$, d 'où :

$\boxed{\lim \overline{u_n} = \ell}$

On a donc montré que pour toute suite convergente, sa suite de Cesaro associée converge vers la même limite

$\boxed{\text{LCC}}$

B. Migration à longues distances et densité moyenne constante

7.a) On peut remarquer que les flux migratoires tendent à réduire les écarts entre les densités. En effet plus la densité u_n est grande, plus le flux partant $-\left((m_d + m_g + m_\infty\right)u_n$ est grand. On peut penser que les maximums ne peuvent que diminuer et que par conséquent, la suite $(u_n(t))$ est bornée . La suite $(\overline{u}_n(t))$ est alors bornée.

b) En sommant les équations on a : $\forall n \geq 1, \quad \frac{d\overline{u}_n}{dt} = m_d \frac{n-1}{n}\overline{u}_{n-1} - (m_d + m_g + m_\infty)\overline{u}_n + m_g \frac{n+1}{n}\overline{u}_{n+1} + m_\infty \overline{u}$

c) Il existe une fonction f positive telle que $\forall t, \quad \forall n, \quad 0 \leq u_n \leq f(t)$. D'après le théorème de convergence dominée (complètement inconnu des élèves de BCPST), $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^t \overline{u}_n(x)dx = \int_0^t \overline{u}(x)dx$.

En intégrant l'équation du b) et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient : $\overline{u}(t) - \overline{u}(0) = 0$

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \overline{u}(t) = \overline{u}(0)}$$

8. Pour $\tilde{u}_n$, comme $\overline{u}' = 0$, on trouve les équations :

$$\boxed{\begin{cases} \forall \geq 1, \quad \dfrac{d\tilde{u}_n}{dt} = m_d \tilde{u}_{n-1} - (m_d + m_g + m_\infty)\tilde{u}_n + m_g \tilde{u}_{n+1} \\ \dfrac{d\tilde{u}_0}{dt} = -(m_d + m_\infty)\tilde{u}_0 + m_g \tilde{u}_1 + (m_g - m_d)\overline{u} \end{cases}}$$

9. A l'équilibre : $\forall n \geq 1, \quad m_g \tilde{u}_{n+1} - (m_d + m_g + m_\infty)\tilde{u}_n + m_d \tilde{u}_{n-1} = 0$

Equation caractéristique : $P(r) = m_g r^2 - (m_d + m_g + m_\infty)r + m_d = 0$

$\Delta = (m_d - m_g)^2 + 2m_\infty\left(m_g + m_d\right) + m_\infty^2 > 0$. Il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$\boxed{\mu_1 = \frac{m_d + m_g + m_\infty - \sqrt{\Delta}}{2m_g} \quad < \quad \mu_2 = \frac{m_d + m_g + m_\infty + \sqrt{\Delta}}{2m_g}}$$

et on a : $\exists \left(c_1, c_2\right) \in IR^2, \quad \forall n, \quad \tilde{u}_n = c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n$

10. $\mu_1 \mu_2 = \frac{m_d}{m_g} > 0$ les deux racines sont donc de même signe.

$\mu_1 + \mu_2 = \frac{m_g + m_d + m_\infty}{m_g} > 0$ donc les racines sont positives .

$P(1) = -m_\infty < 0$, d'où 1 est situé entre les racines ,d'où :

$$\boxed{0 < \mu_1 < 1 < \mu_2}$$

$u_n = \tilde{u}_n + \bar{u}$, d'où $\bar{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k + \bar{u} = \frac{1}{n}\left(c_1\frac{1-\mu_1^n}{1-\mu_1} + c_2\frac{1-\mu_2^n}{1-\mu_2}\right) + \bar{u}$

Si $c_2 \neq 0$, alors $\bar{u}_n \approx \frac{c_2\mu_2^n}{n(\mu_2 - 1)}$ donc $\lim \bar{u}_n = +\infty$. Ceci est impossible, puisque la suite (u_n) admet une moyenne de Cesaro. Donc $c_2 = 0$ et :

$$\boxed{\forall n \in \mathrm{IN}, \quad \tilde{u}_n = c_1\mu_1^n}$$

11. m_∞ est négligeable devant m_g.

a) Interprétation biologique : Les migrations se font principalement entre des territoires consécutifs , x est alors un infiniment petit et nous allons effectuer des développement limités.

$$\Delta = m_g^2\left[(\lambda-1)^2 + 2x(1+\lambda) + x^2\right], \quad \mu_1 = \frac{1+\lambda+x-\sqrt{(\lambda-1)^2+2x(1+\lambda)+x^2}}{2}$$

a) Cas $\lambda = 1$

$\mu_1 = \frac{2+x-\sqrt{4x+x^2}}{2} = \frac{2-2\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{2}$. On a donc :

$$\boxed{\mu_1 = 1 - x^{1/2} + o(x^{1/2})}$$

b) Cas $\lambda > 1$.

$$\mu_1 = \frac{1+\lambda+x-(\lambda-1)\left(1+\frac{1+\lambda}{(\lambda-1)^2}x+o(x)\right)}{2} = \frac{2-\frac{2}{\lambda-1}x+o(x)}{2}$$

$$\boxed{\mu_1 = 1-\frac{1}{\lambda-1}x+o(x)}$$

c) Cas $\lambda < 1$.

$$\mu_1 = \frac{1+\lambda+x+(\lambda-1)\left(1+\frac{1+\lambda}{(\lambda-1)^2}x+o(x)\right)}{2} = \frac{2\lambda+\frac{2\lambda}{\lambda-1}x+o(x)}{2}$$

$$\boxed{\mu_1 = \lambda-\frac{\lambda}{1-\lambda}x+o(x)}$$

12. **a)** D'après les équations du 8., on a : $-(m_d+m_\infty)\tilde{u}_0 + m_g\tilde{u}_1 + (m_g - m_d)\bar{u} = 0$.

D'où : $(x+\lambda)\tilde{u}_0 - \tilde{u}_1 = (1-\lambda)\bar{u}$

D'où : $c_1[(x+\lambda)-\mu_1] = (1-\lambda)\bar{u}$.

$P(\lambda+x) = m_g\left[(\lambda+x)^2 - (1+\lambda+x)(\lambda+x)+\lambda\right] = -m_g x < 0$

D'où $\lambda+x$ est situé entre les racines et alors $x+\lambda-\mu_1 > 0$

$$\boxed{c_1 = \frac{1-\lambda}{x+\lambda-\mu_1}\,\overline{u}}$$

b) Cas $\lambda = 1$: $c_1 = 0$
$\forall n, \quad u_n = \overline{u}$, A l'équilibre, tous les territoires ont même densité, cela provient du fait qu'il n'y a pas de direction privilégiée de migration.

Cas $\lambda > 1$, alors $c_1<0$ (car le dénominateur est positif) et $\forall n, \quad u_n = \overline{u} + c_1\mu_1^n$
Alors la suite (u_n) tend vers $\overline{u}$ en croissant, cela s'explique par le fait que la migration est plus importante de la gauche vers la droite, et donc, plus le territoire est loin de l'origine, plus sa densité est élevée.

Cas $\lambda < 1$, $c_1>0$. C'est le contraire la suite (u_n) est décroissante.

c) Lorsque c1 <0, pour montrer que la suite est positive, il suffit de montrer que $u_0>0$, puisque la suite est croissante. $u_0 = c_1 + \overline{u} = \overline{u}\dfrac{1+x-\mu_1}{x+\lambda-\mu_1} > 0$, car $1-\mu_1>0$

Troisième partie : migration aléatoire

A Comportement asymptotique de la population

1. a) Soit Z_k, la variable aléatoire telle que :
$Z_k= 1$ si l'individu se déplace vers la droite lors de l'instant k-1 à k
$Z_k= -1$ si l'individu se déplace vers la gauche lors de l'instant k-1 à k
$Z_k= 0$ si l'individu reste à sa place lors de l'instant k-1 à k
On a :

$$\boxed{Y(t) = \sum_{k=1}^{t} Z_k}$$

Les déplacements étant indépendants, les v.a.r. Z_k sont indépendantes.
Elles ont même loi : $P(Z_k = 1) = p_d, \quad P(Z_k = -1) = p_g, \quad P(Z_k = 0) = 1 - p_g - p_d$

b)

$$\boxed{E(Z_1) = p_d - p_g, \quad E(Y(t)) = t(p_d - p_g)}$$

$$\boxed{V(Z_1) = p_g + p_d - (p_g - p_d)^2, \quad V(Y(t)) = tV(Z_1)}$$

par l'indépendance des Z_k

2.a) $-1 \le Z_k \le 1$, donc $Y(t) \in [-t,t]$ et pour $t < n$, $Y(t) \in]-n,n[$, d'où :
$\boxed{P[\in]-\infty,-n] \cup [n,+\infty[] = 0}$

b) Soit j un entier relatif. Un individu au départ se trouvant en T_j, se trouve à l'instant t en T_k, avec $k \in \{j-t,..,j+t\}$. Donc si $j \le -a-t$, cet individu est dans un T_n, avec $n \le -a$. Il y a donc une infinité d'individus se trouvant à l'instant t dans un T_n avec $n \le -a$.
On a le même raisonnement pour $j \ge a+t$, il y a aura une infinité d'individus se trouvant à l'instant t dans un T_n, avec $n \ge a$.

P(la population totale présente au temps t dans $(T_n)_{n\le -a}$ est infinie) = 1
P(la population totale présente au temps t dans $(T_n)_{n\ge a}$ est infinie) = 1

3. a) Loi faible des grands nombres : Les v.a.r. sont indépendantes de même loi, admettant une espérance m et une variance, alors : $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{t\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{t} Z_k}{t} - m\right| > \varepsilon\right) = 0$.

D'où $\lim_{t\leftarrow\infty} P\left(\left|Y(t) - (p_d - p_g)t\right| \geq t\varepsilon\right) = 0$ d' où $\lim_{t\to\infty} P\left((p_d - p_g - \varepsilon)t < Y(t) < (p_d - p_g + \varepsilon)t\right) = 1$

Si $p_d > p_g$. Choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < p_d - p_g$ et posons $a = p_d - p_g - \varepsilon > 0$

$P(Y(t) > at) \geq P\left((p_d - p_g - \varepsilon)t < Y(t) < (p_d - p_g + \varepsilon)t\right)$. D'où par le théorème d'encadrement $\lim_{t\to\infty} P(Y(t) > at) = 1$

Y(t) converge en probabilité vers $+\infty$, i.e.

$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall A > 0, \quad \exists T \in IN, \quad \forall t \geq T, \quad P(Y(t) > A) > 1 - \alpha}$

Pour $p_g > p_d$, Y(t) tend en probabilité vers $-\infty$

b) Si $p_d > p_g$, si on considère $Y_1, ..Y_p$ les positions des p individus constituant la population, on a le même résultat qu'au a) pour ces v.a.r. Y_i, et on aura donc :

$\forall \alpha > 0, \quad \forall A > 0, \quad \exists T \in IN, \quad \forall t \geq T, \quad P(\bigcap_{i=1}^{p} (Y_i(t) > A)) = \prod_{i=1}^{p} P(Y_i(t) > A) > (1-\alpha)^p$ (indépendance)

$\forall \beta > 0, \quad \forall A > 0, \quad \exists T \in IN, \quad \forall t \geq T, \quad P(\bigcap_{i=1}^{p} (Y_i(t) > A)) > 1 - \beta$.

Et donc, la probabilité que toute la population soit dans des territoires $(T_n)_{n\geq a}$ tend vers 1 quand t tend vers l'infini

De même pour $p_d < p_g$, la probabilité que toute la population soit dans des territoires $(T_n)_{n\leq -a}$ tend vers 1 quand t tend vers l'infini

B Covariances spatiales à l'équilibre

Remarque : il manque une hypothèse dans le résultat admis : il faut une hypothèse d'indépendance :

$P((U_1 = i),(U_2 = j)/(V_1 = k),(V_2 = \ell)) = P(U_1 = i / V_1 = k)P(U_2 = j / V_2 = \ell)$

4. Notons D_{n-1} le nombre d'individus allant de T_{n-1} à T_n (entre l'instant t et t+1)
Notons R_n le nombre d'individus restant en T_n
Notons G_{n+1} le nombre d'individus allant de T_{n+1} à T_n . On a :

$$\boxed{X'_n = D_{n-1} + R_n + G_{n+1}}$$

Sachant $X_{n-1}=k$, chacun des k individus de T_{n-1} ont une probabilité p_d d'aller en T_n, et ceci de manière indépendante. On a affaire à un schéma binomial et la loi conditionnelle de D_{n-1} sachant $X_{n-1}=k$ est la binomiale $\mathcal{B}(k,p_d)$

De même : $R_{n/X_n=k}$ suit $\mathcal{B}(k,1-p_d-p_g)$ et $G_{n+1/X_{n+1}=k}$ suit $\mathcal{B}(k,p_g)$

Connaissant le nombre d'individus dans les territoires T_{n-1}, T_n et T_{n+1}, le nombre d'individus allant de T_{n-1} à T_n, le nombre d'individus restant en T_n et le nombre d'individus venant de T_{n+1} vers T_n sont bien indépendants.

5. Tous les territoires sont identiques (au départ même nombre d'individus et migrations identiques) et jouent le même rôle d'où la loi de (X_0,X_k) est la même que celle de (X_n,X_{n+k}), donc $\text{cov}(X_i,X_j)$ de dépend que de j-i, (plus précisément que de $|j-i|$)

$c_k = \text{cov}(X_0,X_k) = \text{cov}(X_{-k},X_0) = \text{cov}(X_0,X_{-k}) = c_{-k}$

6. a) $\text{cov}(X'_n, X'_{n+k}) = \text{cov}(D_{n-1} + R_n + G_{n+1}, D_{n+k-1} + R_{n+k} + G_{n+k+1})$
On utilise la bilinéarité de la covariance et le résultat admis du B.

Si $k \neq -1$, D_{n-1} et R_{n+k} sachant X_n et X_{n+k} sont indépendantes : $\text{cov}(D_{n-1}, R_{n+k}) = p_d(1-p_d-p_g)\text{cov}(X_n, X_{n+k})$
Par contre , si k=-1, on n'a plus l'hypothèse d'indépendance

De même, on peut de même appliquer le résultat pour D_{n-1} et D_{n+k-1}, pour $k \neq 0$

De même, on peut de même appliquer le résultat pour D_{n-1} et G_{n+k+1}, pour $k \neq -2$ …etc

Bref, la formule ci-dessous est valable pour k<-2 et pour k>2

$$\text{cov}(X'_n, X'_{n+k}) = p_d^2 c_k + p_d(1-p_d-p_g)c_{k+1} + p_d p_g c_{k+2} + (1-p_d-p_g)p_d c_{k-1} + (1-p_d-p_g)^2 c_k + (1-p_d-p_g)p_g c_{k+1} + p_g p_d c_{k-2} + p_g(1-p_d-p_g)c_{k-1} + p_g^2 c_k$$

$$\boxed{\text{cov}(X'_n, X'_{n+k}) = p_g p_d c_{k+2} + (p_d + p_g)(1-p_g-p_d)c_{k+1} + \left(p_d^2 + (1-p_d-p_g)^2 + p_g^2\right)c_k + (p_d+p_g)(1-p_d-p_g)c_{k-1} + p_g p_d c_{k-2}}$$

b) A l'équilibre $\text{cov}(X'_n, X'_{n+k}) = \text{cov}(X_n, X_{n+k}) = c_k$.
En divisant par $p_g p_d$, on obtient :
$c_{k+2} + \sigma c_{k+1} + \beta c_k + \sigma c_{k-1} + c_{k-2} = 0$
avec $\beta = \dfrac{p_d^2 + (1-p_d-p_g)^2 + p_g^2 - 1}{p_g p_d} = \dfrac{2(p_d^2 + p_g^2 - p_d - p_g + p_d p_g)}{p_g p_d} = -2(1+\sigma)$

$$\boxed{c_{k+2} + \sigma c_{k+1} - 2(1+\sigma)c_k + \sigma c_{k-1} + c_{k-2} = 0}$$

7. a) $P(x) = x^4 + \sigma x^3 - 2(1+\sigma)x^2 + \sigma x + 1$

b) Si λ est une racine de P, λ est non nulle et $P(\lambda^{-1}) = \lambda^{-4}P(\lambda) = 0$. (P est un polynôme symétrique)

c) 1 est racine évidente et P'(1) =0, donc 1 est racine au moins double.

d) En factorisant par $(x-1)^2$: $P(x) = (x-1)^2(x^2+(\sigma+2)x+1) = (x-1)^2Q(x)$.
Etudions les racines de Q : $\Delta = \sigma(\sigma+4) \geq 0$. Il y a donc deux racines réelles distinctes ou confondues $\lambda_1 = \dfrac{-(\sigma+2) - \sqrt{\sigma^2+4\sigma}}{2} < 0$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{-(\sigma+2) + \sqrt{\sigma^2+4\sigma}}{2}$

Les deux racines sont négatives car $\sigma + 2 > \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma}$

8. a) Par le produit des racines d'un trinôme, $\lambda_1\lambda_2 = 1$ (on le sait d'ailleurs d'après b))
Q(-1)= $-\sigma$ <0, d'où –1 est situé entre les racines :

$$\boxed{\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0}$$

b) Une explication « biologique » : l'influence du territoire T_n sur le territoire T_{n+k} ou T_{n-k} est très faible lorsque k et grand d'où $\lim c_k = \lim c_{-k} = 0$

On ne peut pas utiliser le rappel (qui n'en est pas un pour les élèves de BCPST, sauf pour une équation linéaire d'ordre 2), car les racines de P ne sont pas simples.

Posons $u_k = c_{k+2} + (\sigma+2)c_{k+1} + c_k$ et $v_k = u_k - u_{k-1}$
Alors $\forall k > 2, \quad u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2} = 0$ et $v_k = v_{k-1}$.
La suite (v_k) est constante et $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 0$ d'où $\forall k > 1, \quad v_k = 0, \quad u_k = u_{k-1}$

Pour les mêmes raisons, $\forall k \geq 1, \quad u_k = 0$

D'où $\exists (a,b) \in IR^2, \quad \forall k \geq 1, \quad c_k = a(\lambda_1)^k + b(\lambda_2)^k$

$\lim\limits_{k\to+\infty} c_k = 0$ et $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| < 1$, d'où $a = 0$

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad c_k = c_1(\lambda_2)^{k-1}, \quad c_{-k} = c_1(\lambda_2)^{-k-1}, \quad \forall k \in Z^*, \quad c_k = c_1(\lambda_2)^{|k|-1}}$$

c) $p_g = p_d = p/2$

$\sigma = \dfrac{4(1-p)}{p}, \quad \lambda_2 = \dfrac{-2+p+2\sqrt{1-p}}{p} = -\dfrac{\left(1-\sqrt{1-p}\right)^2}{p}$. D'où:

$$\boxed{\forall k \in Z, \quad c_k = c_1\left(-\frac{1}{p}\right)^{|k|-1}\left(1-\sqrt{1-p}\right)^{2|k|-2}}$$

Corrigé proposé par Martine Ginestet (UPA)
Pour toute remarquer, me contacter : martine-ginestet@orange.fr