

Corrigé de l'épreuve e3a (PC1)

Exercice 1

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ a) } e^{-x} - f_{n+1}(x) &= e^{-x} - f_n(x) - \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)) = (e^{-x} - f_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(e^{-x} - f_n(x))\right) \\ &= (e^{-x} - f_n(x))\phi(x). \end{aligned}$$

b) On montre par récurrence sur n que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$:

* $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_0(x) = 0$ donc l'encadrement est vérifié au rang 0.

* On suppose l'encadrement réalisé au rang n ;

au rang $n+1$: $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)) \geq 0$

et $e^{-x} - f_{n+1}(x) = (e^{-x} - f_n(x))\phi(x)$; or $f_n(x) \leq e^{-x} \implies \phi(x) \geq 1 - e^{-x} \geq 0$ pour $x \geq 0$,

donc $f_{n+1}(x) \leq e^{-x}$.

Par suite, l'encadrement est vrai au rang $n+1$;

on en déduit qu'il est vrai pour tout n .

De plus : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$:

la suite (f_n) est donc croissante .

Pour tout x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante ;

étant majorée par e^{-x} , elle est donc convergente.

La fonction $\varphi : u \mapsto u + \frac{1}{2}(e^{-2x} - u^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}$,

la limite $l(x)$ de la suite est un point fixe de φ .

On en déduit que $l(x) = \pm e^{-x}$; comme de plus, la suite est positive ou nulle, la limite ne peut qu'être égale à e^{-x} .

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

$$2^\circ \text{ a) } \forall x \in [0, a] \quad 0 \leq \phi(x) \leq 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{2}e^{-a} = k_a.$$

Il existe donc $k_a \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in [0, a] \quad 0 \leq e^{-x} - f_{n+1}(x) \leq k_a(e^{-x} - f_n(x))$.

b) On en déduit que $\forall x \in [0, a] \quad 0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq k_a^n \cdot e^{-x} \leq k_a^n$.

Comme $\lim_n k_a^n = 0$, on conclut que (f_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

$$3^\circ \text{ a) } \text{ On a : } u_{n+1} = u_n \phi(0) = \frac{1}{2}u_n^2.$$

Donc $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \dots \times \frac{1}{2^{2^{n-1}}} (u_0)^{2^n} = \frac{(u_0)^{2^n}}{2^{2^n-1}} = 2 \left(\frac{u_0}{2}\right)^{2^n} = 2^{1-2^n}$.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; la série de terme général u_n étant à termes positifs est convergente en vertu de la règle de D'Alembert.

Exercice 2

1°. $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ et contient l'application nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

De la linéarité de la limite et de dérivée n -ième,
on déduit que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2°.a.) ϕ est définie sur $\mathcal{E}$, on vérifie que : $\phi(f)(0) = 0$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\phi(f)^{(n)} = f^{(n+1)}$,

$\lim_{+\infty} \phi(f)^{(n)} \in \mathbb{R}$.donc $\phi(f) \in \mathcal{E}$.

De la linéarité de la dérivation, on déduit que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$

ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$

2.b.) Supposons $\phi(f) = 0$, $f \in \mathcal{E}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) = f'(0)$.

Il existe donc un réel k tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = xf'(0) + k$.

Or $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = xf'(0)$

De plus $\lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$

ϕ est injective

3. Soit g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = (x+1) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}x$,

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

soit la proposition de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}^+, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$$

avec P_n et Q_n fonctions polynomiales, $n \in \mathbb{N}^*$.

Avec : $P_1(x) = 1$, $Q_1(x) = -\frac{\pi}{2}x$, on trouve que :

$$g'(x) = P_1\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_1\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée de $x \mapsto P_n(x) \sin(\pi x) + Q_n(x) \cos(\pi x)$ est :

$$x \mapsto (P'_n(x) - \pi Q_n(x)) \sin(\pi x) + (Q'_n(x) + \pi P_n(x)) \cos(\pi x)$$

$$\text{et la dérivée de } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{ est } x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x+1})^3}$$

donc par dérivation d'une fonction composée : la dérivée de

$$x \mapsto P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$$

est la fonction :

$$x \mapsto P_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\text{avec : } P_{n+1}(X) = -\frac{1}{2}X^3(P'_n(X) - \pi Q_n(X)) \text{ et : } Q_{n+1}(X) = -\frac{1}{2}X^3(Q'_n(X) + \pi P_n(X))$$

Ainsi on prouve que $\mathcal{P}(2)$ est vraie et que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$

est vraie ,

donc grâce au théorème de récurrence :

$$\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, n \geq 2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}$,
 $g'(0) = 0$ et de la forme de $g^{(n)}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{(n)}(x) = Q_n(0)$. On en déduit que :

$$\boxed{g' \in \mathcal{E}}$$

b) Supposons f élément de $\mathcal{F}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ f'(x) - f'(0) = g'(x)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) + f'(0)x + cte$.

Réciproquement en supposant $\forall x \in \mathbb{R}_+ f(x) = g(x) + ax + b$,

on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ f'(x) = g'(x) + a$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ f'(x) - f'(0) = g'(x)$

d'où

l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ f'(x) - f'(0) = g'(x)$ est composé des fonctions telles qu'il existe 2 réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x) + ax + b$

Supposons qu'une telle fonction f appartienne à $\mathcal{E}$; alors $f(0) = 0$ donc

$b = 0$.

De plus : $(x+1) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \pi \sqrt{x+1}$

donc pour $a \neq \frac{\pi}{2}$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(a - \frac{\pi}{2}\right)x$

et pour $a = \frac{\pi}{2}$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \pi \sqrt{x+1}$.

donc f a une limite non finie en $+\infty$, ainsi $f \notin \mathcal{E}$,

il n'existe donc pas d'élément f de $\mathcal{E}$ tel que : $\phi(f) = g'$

$$\boxed{\phi \text{ n'est pas surjective}}$$

4. On sait tout d'abord que 0 n'est pas valeur propre de ϕ puisque ϕ est injective.

Soit λ un réel non nul, et supposons f élément de $\mathcal{E}$ tel que : $\phi(f) = \lambda f$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) - f'(0) = \lambda f(x)$, ainsi f vérifie :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) - \lambda f(x) = f'(0)$$

Réolvons : $y'(x) - \lambda y(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / y(x) = ke^{\lambda x}$

puis $y'(x) - \lambda y(x) = a$, a réel (E)

Une solution évidente de (E) est : $x \mapsto -\frac{a}{\lambda}$ donc : y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y(x) = -\frac{a}{\lambda} + ke^{\lambda x}$$

En réinjectant l'expression $f(x) = -\frac{a}{\lambda} + ke^{\lambda x}$, on obtient que $a = k\lambda$,

Figure 1:

donc (1) équivaut à $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = k(e^{\lambda x} - 1)$.

Il reste à vérifier si : $f \in \mathcal{E}$

On a bien $f(0) = 0$ et : pour k non nul :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda < 0$

dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f^{(n)}(x) = k\lambda^n e^{\lambda x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) =$

$0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi

$Sp(\phi) = \mathbb{R}_-^*$ et $E_\phi(\lambda) = Vect(f_\lambda)$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x} - 1$

Exercice 3

1°a) En passant en coordonnées polaires, $f(x, y) = \rho^{2\rho \cos \theta} = e^{2 \cos \theta \cdot \rho \ln \rho}$;

or $\lim_{(x,y) \xrightarrow{\neq} (0,0)} \rho \ln \rho = 0$ et $2 \cos \theta$ est bornée,

$(x,y) \xrightarrow{\neq} (0,0)$

donc, $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \xrightarrow{\neq} (0,0)} 1 = f(0, 0)$ et f est continue en $(0, 0)$.

Comme d'après les théorèmes généraux de continuité,

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{e^{x \ln x^2} - 1}{x} \sim \frac{x \ln x^2}{x} = \ln x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$:

f n'admet donc pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$.

Figure 2:

De plus, $\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$:

f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$ égale à 0.

$$\begin{aligned} \textbf{c)} \quad & f(0,0) = 1 \text{ et pour } (x,y) \neq (0,0) \\ & f(x,y) = 1 \iff (x^2 + y^2)^x = 1 \iff x \ln(x^2 + y^2) = 0 \\ & \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2°a) Soit $g(x) = f(x,0)$;
 g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$;
 $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = (\ln x^2 + 2) (x^2)^x$

L'on a vu ci-dessus que $\frac{g(x) - g(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$: la courbe de g présente donc une tangente verticale en $(0,0)$.

$$\lim_{-\infty} g = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} g = +\infty.$$

b) Pour $x \in \left] -\frac{1}{e}, 0 \right[$, $g(x) > g(0) = 1$ donc $f(x,0) > f(0,0)$: f n'admet pas de maximum en $(0,0)$.

Pour $x \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$, $g(x) < g(0) = 1$ donc $f(x,0) < f(0,0)$: f n'admet pas de minimum en $(0,0)$.

f n'admet donc pas d'extremum en $(0,0)$.

3°) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) f(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} f(x,y).$$

Les points critiques sont donc solutions de :

Figure 3:

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = \pm 1 \\ \text{ou } y = 0 \text{ et } x = \pm \frac{1}{e} \end{cases}$$

Ce sont donc : $(0, 1), (0, -1), (\frac{1}{e}, 0)$ et $(-\frac{1}{e}, 0)$.

4°a) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $x > 0$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x \geq x^{2x} = f(x, 0) = g(x)$.

$$f(0, 0) = 1 \geq g(0) = 1$$

donc pour tout $x \geq 0$, $f(x, y) \geq g(x)$.

Or g admet un minimum en $\frac{1}{e}$; on en déduit que f admet un minimum en

$$\left(\frac{1}{e}, 0\right).$$

b) $f(x, 0) = g(x) \leq g(-\frac{1}{e}) = f\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ pour tout $x < 0$;

d'autre part, $x \ln x^2 - x \ln(x^2 + y^2) = x \ln \frac{x^2}{x^2 + y^2} \geq 0$ pour tout $x < 0$.

Donc $f(x, y) = e^{x \ln(x^2 + y^2)} \leq e^{x \ln x^2} = f(x, 0) \leq f\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

f admet donc un maximum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

5°) Soit $h(x) = f(x, 1) - f(0, 1) = (x^2 + 1)^x - 1$;

$$h'(x) = \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) h(x) = k(x)h(x)$$

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \left(1 + \frac{2}{x^2 + 1} \right).$$

$k'(x)$ est du signe de x ;

k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $k(0) = 0$, k et donc h' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, et s'annule en 0.

h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme $h(0) = 0$, $h(x)$ est du signe de x .

De même, $f(x, -1) - f(0, -1)$ est du signe de x :

f n'admet pas d'extremum en $(0, 1)$ ni en $(0, -1)$.

En fait, ce sont des cols ; bon exercice : compléter les courbes de niveaux dans la figure ci-dessus !