

Centrale TSI 2009 - Mathématiques 2

Partie I - Matrices symétriques

I.A -

I.A.1) $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (c + f)X + cf - de.$

I.A.2) Les valeurs propres étant racines de χ_A , l'on a, si λ et μ sont les valeurs propres de A :

$$\lambda + \mu = \text{tr}(A) \text{ et } \lambda\mu = \det(A)$$

I.A.3) Les valeurs propres de A sont réelles car la matrice est symétrique réelle. Elles sont non nulles et de même signe si et seulement si $\det(A) > 0$.

Dans ce cas, ce signe commun est celui de leur somme, qui est aussi celui de la trace de A .

Donc :

$$A \text{ admet deux valeurs propres strictement positives} \Leftrightarrow \text{tr}(A) > 0 \text{ et } \det(A) > 0$$

I.B -

I.B.1)

a)

$$\begin{array}{lll} M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & M_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} a_{ij} M_{i,j}.$$

D'où $(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

La famille est évidemment libre. D'où

$$(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 3} \text{ est une base de } \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

I.B.2)

a) Le nombre de matrices $M_{i,j}$ est égal au nombre de coefficients sur et au-dessus de la diagonale

$$\text{d'une matrice } n \times n, \text{ c'est-à-dire } n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} M_{i,j}.$$

Donc A est combinaison linéaire des matrices $M_{i,j}$.

b) $(M_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est par ailleurs évidemment une famille libre et donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'où :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

I.C -

$$\begin{aligned} \text{I.C.1)} \quad q(V + V') &= {}^t(V + V'A(V + V')) \\ &= {}^tVAV + {}^tV'AV + {}^tVAV' + {}^tV'AV' \\ &= q(V) + 2{}^tVAV' + q(V') \text{ car } {}^tV'AV = ({}^tV'AV) = {}^tV {}^tAV' = {}^tVAV' \end{aligned}$$

D'où :

$${}^tVAV' = \frac{q(V + V') - q(V) - q(V')}{2}$$

$$\text{I.C.2)} \text{ Posons } V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ième ligne et } V' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-ième ligne.}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} {}^tVAV' &= \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième colonne}}}{1} & \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

I.C.3) Notons q_1 l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $V \in \mathbb{R}^n$ associe tVA_1V et q_2 définie de même manière à l'aide de la matrice A_2 .

$$\text{Posons, pour } i \text{ et } j \in \{1, \dots, n\}, V_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ième ligne et } V_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-ième ligne.}$$

Posons $A_1 = (a_{1ij})$ et $A_2 = (a_{2ij})$.

L'hypothèse équivaut alors à $q_1 = q_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} a_{1ij} &= {}^tV_iA_1V_j \\ &= \frac{q_1(V_i + V_j) - q_1(V_i) - q_1(V_j)}{2} \\ &= \frac{q_2(V_i + V_j) - q_2(V_i) - q_2(V_j)}{2} \\ &= {}^tV_iA_2V_j \\ &= a_{2ij} \text{ et} \end{aligned}$$

$$A_1 = A_2$$

I.C.4)

a) La matrice A_1 , symétrique réelle est diagonalisable et il existe $P \in O(n)$, $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles

$$\text{que } D = {}^tPA_1P \Leftrightarrow A_1 = PD^tP \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a alors ${}^tVA_1V = {}^tVPD^tPV$.

En posant $W = {}^tPV$, l'on a la fois $W \neq 0$ car $V \neq 0$ et tP est inversible, et ${}^tVA_1V = {}^tWDW$.

Donc :

$$\boxed{\exists W \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall A_1 V = {}^t W D W \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

b) Si l'on pose $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, ${}^t V A_1 V = {}^t W D W = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2 > 0$ car tous les λ_i sont strictement positifs et l'un au moins des w_i est non nul. Donc :

$$\boxed{{}^t V A_1 V > 0}$$

c) On a alors ${}^t \left(\frac{V}{r}\right) A_1 \left(\frac{V}{r}\right) = \frac{{}^t V A_1 V}{r^2} = 1 \Rightarrow {}^t \left(\frac{V}{r}\right) A_2 \left(\frac{V}{r}\right) = 1$
 $\Rightarrow {}^t V A_2 V = r^2 = {}^t V A_1 V$

d) On a montré précédemment que pour tout vecteur non nul V , ${}^t V A_1 V = r^2 = {}^t V A_2 V$. Cette propriété vaut aussi pour $V = 0$ et $\forall V \in \mathbb{R}^n$, ${}^t V A_1 V = {}^t V A_2 V$. D'après I.C.3),

$$\boxed{A_1 = A_2}$$

Partie II - Quelques propriétés de l'ellipse

II.A -

II.A.1) L'endomorphisme f , symétrique, est diagonalisable et il existe une base orthonormée directe de $(\vec{\Pi}) : (\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ dans la quelle la matrice f s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Alors dans le repère $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$, si M a pour coordonnées (x, y) ,

$$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \text{ et}$$

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ a pour équation } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1}$$

II.A.2) Comme

- ✓ les valeurs propres de f sont λ_1 et λ_2 ,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ est une ellipse $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est une ellipse } \Leftrightarrow \text{ les valeurs propres de } f \text{ sont strictement positives}}$$

II.B -

II.B.1) L'ellipse $\mathcal{E}$ admet dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux réels strictement positifs. Soit f l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$. f est alors un endomorphisme symétrique puisque sa matrice dans une base orthonormée est symétrique. Ses valeurs propres sont $\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{b^2}$, strictement positives.

On a alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = 1$ et

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{C}_f}$$

II.B.2) Soit g un autre endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives tel que $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f$. Notons A_1 et A_2 les matrices de f et g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, q_1 et q_2 les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives A_1 et A_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $V \in \mathbb{R}^2$ et M le point de coordonnées V dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on a alors $q_1(V) = \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM})$ et $q_2(V) = \overrightarrow{OM} \cdot g(\overrightarrow{OM})$.

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathcal{E} = \mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g, \text{ cela signifie que : } & q_1(V) = 1 \Rightarrow M \in \mathcal{C}_f \\ & \Rightarrow M \in \mathcal{C}_g \\ & \Rightarrow q_2(V) = 1 \end{aligned}$$

Comme les valeurs propres de A_1 (qui sont celles de f) sont strictement positives, d'après la question I.C.4), $A_1 = A_2 \Leftrightarrow f = g$.

Il y a donc unicité de l'endomorphisme f associé à $\mathcal{E}$

II.C -

II.C.1) Les trois matrices données sont bien symétriques et forment évidemment une famille libre de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

II.C.2) Comme la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est 3, la famille précédente est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

La matrice M_f de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est symétrique réelle. Donc :

$$\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, M_f = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}.$$

J'ai montré :

$$\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}$$

II.C.3) D'après la question I.A.3), les valeurs propres de M_f , symétrique réelle, sont strictement positives si et seulement si :

$\text{tr } M_f > 0$ et $\det M_f > 0$ ce qui est équivalent à :

$2\gamma > 0$ et $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 > 0$. D'où :

$$f \text{ admet deux valeurs propres réelles et strictement positives } \Leftrightarrow \gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \text{ et } \gamma > 0.$$

II.D -

II.D.1) Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$,

$\mathcal{C}_f$ a pour équation $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'intérieur de l'ellipse étant caractérisé par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, l'on a :

$$\forall M \in (\Pi), M \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) \leq 1$$

II.D.2) Si M a pour coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

$$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy. \text{ Donc, pour}$$

tout point M de (Π) , de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

$$M \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E} \Leftrightarrow (\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy \leq 1$$

II.D.3) Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f .

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$, $\mathcal{E}$ a pour équation $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'aire de $\mathcal{E}$ est alors $\pi ab = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det f}}$.

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{E} \text{ est donc } \frac{\pi}{\sqrt{\det f}}}$$

II.D.4) Le déterminant d'un endomorphisme étant celui de sa matrice dans une base quelconque,

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{E} \text{ est donc } \frac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}}$$

Partie III - Existence d'une ellipse optimale

III.A -

III.A.1) Notons $\mathcal{E}$ une ellipse convenable, (α, β, γ) le triplet associé à $\mathcal{E}$, (x_l, y_l) les coordonnées de P_l , $l = 1, \dots, k$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si P_i ou P_j est égal à O , on peut supprimer ce point intérieur à l'ellipse.

Sinon, puisque O, P_i, P_j sont alignés, $\exists t \in [-1, 1], \overrightarrow{OP_j} = t\overrightarrow{OP_i}$ (par exemple car si $|t| > 1$, en échangeant i et j , $\overrightarrow{OP_i} = \frac{1}{t}\overrightarrow{OP_j}$ avec $\left|\frac{1}{t}\right| < 1$).

Comme P_i est à l'intérieur de l'ellipse :

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)x_i^2 + (\gamma + \alpha)y_i^2 - 2\beta x_i y_i &\leq 1 \Rightarrow t^2 ((\gamma - \alpha)x_i^2 + (\gamma + \alpha)y_i^2 - 2\beta x_i y_i) \leq t^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (\gamma - \alpha)x_j^2 + (\gamma + \alpha)y_j^2 - 2\beta x_j y_j \leq 1 \\ &\Rightarrow P_j \text{ est à l'intérieur de } \mathcal{E}. \end{aligned}$$

D'où, en supprimant le point P_j , $\mathcal{E}$ est encore convenable.

En supprimant le point P_j , on ne change pas l'ensemble des ellipses convenables.

III.A.2) Comme $x_i = \rho_i \cos(\theta_i)$ et $y_i = \rho_i \sin(\theta_i)$, P_i est à l'intérieur de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)\rho_i^2 \cos^2(\theta_i) + (\gamma + \alpha)\rho_i^2 \sin^2(\theta_i) - 2\beta\rho_i^2 \cos(\theta_i) \sin(\theta_i) &\leq 1 \Leftrightarrow \\ \gamma\rho_i^2 - \alpha\rho_i^2 \cos(2\theta_i) - \beta\rho_i^2 \sin(2\theta_i) &\leq 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma \leq \alpha \cos(2\theta_i) + \beta \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}}$$

puisque $\rho_i \neq 0$.

III.A.3) Cette inégalité est une égalité lorsque P_i se trouve sur $\mathcal{E}$.

III.B - Si l'on note $R = \max \{OP_i / i \in \{1, \dots, k\}\}$, l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est convenable.

III.C -

III.C.1) L'aire de $\underline{E}_1$ vaut $\frac{\pi}{\sqrt{r^2\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}}$. D'où :

L'aire de $\mathcal{E}_1$ est inférieure à celle de $\mathcal{E}_0$

III.C.2) L'on sait que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\gamma_0 \leq \alpha_0 \cos(2\theta_i) + \beta_0 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$.

Notons $m = \min \left\{ \alpha_0 \cos(2\theta_i) + \beta_0 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} / i \in \{1, \dots, k\} \right\}$. Alors $\gamma_0 \leq m$.

Posons $r = \frac{m}{\gamma_0}$ (cela est possible car $\gamma_0 > 0$ d'après la question II.C.3)), $\gamma_1 = r\gamma_0$, $\alpha_1 = \alpha_0$ et $\beta_1 = \beta_0$.

On a alors $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_1^2 > \alpha_1^2 + \beta_1^2$, ce qui montre l'existence de $\mathcal{E}_1$ associée à $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

En outre, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\gamma_1 = m \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_1$ est convenable et $\gamma_1 = m$, qui est atteint pour une valeur s de $\{1, \dots, k\}$ et donc $\gamma_1 = \alpha_1 \cos(2\theta_s) + \beta_1 \sin(2\theta_s) + \frac{1}{\rho_s^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_1$ passe par P_s .

On peut donc choisir r tel que $\mathcal{E}_1$ soit convenable et passe par l'un des points $P_1, \dots, P_k$

III.D -

III.D.1) Posons $\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda$, $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1 + \lambda$.

Comme $\gamma_1 > 0$ et $\lambda \geq 0$, $\gamma_2 > 0$.

Comme $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leq \gamma_1^2$, $|\alpha_1| \leq \gamma_1$.

$$\begin{aligned} \text{En outre } \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= (\alpha_1 + \lambda)^2 + \beta_1^2 \\ &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda^2 \\ &\leq \gamma_1^2 + 2\lambda\alpha_1 + \lambda^2 \\ &\leq \gamma_1^2 + 2\lambda\gamma_1 + \lambda^2 \text{ (car } |\alpha_1| < \gamma_1) \\ &\leq (\gamma_1 + \lambda)^2 = \gamma_2^2 \end{aligned}$$

Donc $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_2$.

L'on sait que $\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{1}{\rho_1^2}$ puisque $\mathcal{E}_1$ passe par P_1 .

On a alors $\gamma_1 + \lambda = \alpha_1 + \lambda + \frac{1}{\rho_1^2} \Rightarrow \gamma_2 = \alpha_2 + \frac{1}{\rho_1^2}$, ce qui montre que $\mathcal{E}_2$ passe par P_1 .

L'aire de $\mathcal{E}_2$ est $\frac{\pi}{\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 + 2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1)}}$.

Or $2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1) \geq 0$.

D'où l'aire de $\mathcal{E}_2$ est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_1$.

Le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ est donc associé à une ellipse $\mathcal{E}_2$ de centre O passant par P_1 et dont l'aire est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_1$.

III.D.2) Soit $i \in \{2, \dots, k\}$. $1 - \cos(2\theta_i) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos(2\theta_i) = 0 \Leftrightarrow \theta_i = 0 \text{ } [\pi]$, ce qui signifie que $P_i \in (OP_1)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

$$\forall i \in \{2, \dots, k\}, 1 - \cos(2\theta_i) > 0$$

III.D.3) L'on sait que $\mathcal{E}_1$ est convenable, donc $\forall i \in \{2, \dots, k\}$, $\gamma_1 \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$.

Dire que $\mathcal{E}_2$ est convenable, c'est dire que $\forall i \in \{2, \dots, k\}$, $\gamma_2 \leq \alpha_2 \cos(2\theta_i) + \beta_2 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} \Leftrightarrow$

$$\lambda(1 - \cos(2\theta_i)) \leq \alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} - \gamma_1.$$

Choisissons $\lambda = \min_{i \in \{2, \dots, k\}} \frac{\alpha_1 \cos(2\theta_i) + \beta_1 \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} - \gamma_1}{1 - \cos(2\theta_i)}$. Alors $\lambda \geq 0$. Pour cette valeur de

λ , $\mathcal{E}_2$ est convenable et $\exists s \in \{2, \dots, k\}$, $\lambda = \frac{\alpha_1 \cos(2\theta_s) + \beta_1 \sin(2\theta_s) + \frac{1}{\rho_s^2} - \gamma_1}{1 - \cos(2\theta_s)}$, ce qui signifie que $\mathcal{E}_2$ passe par P_s .

On peut donc trouver λ tel que $\mathcal{E}_2$ soit convenable et passe par l'un des points $P_2, \dots, P_k$

III.E -

III.E.1) (α, β, γ) vérifie le système :

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \frac{1}{\rho_1^2} \\ \gamma = \alpha \cos(2\theta_2) + \beta \sin(2\theta_2) + \frac{1}{\rho_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = \frac{1}{\rho_1^2} \\ -\alpha \cos(2\theta_2) + \gamma = \beta \sin(2\theta_2) + \frac{1}{\rho_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1 - \cos(2\theta_2)) = -\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \beta \sin(2\theta_2) \\ \gamma(1 - \cos(2\theta_2)) = -\frac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta \sin(2\theta_2) + \frac{1}{\rho_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \beta \sin(2\theta_2)}{1 - \cos(2\theta_2)} = g(\beta) \\ \gamma = \frac{-\frac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta \sin(2\theta_2) + \frac{1}{\rho_2^2}}{1 - \cos(2\theta_2)} = h(\beta) \end{cases}$$

Donc, les triplets (α, β, γ) qui vérifie $\gamma = \alpha \cos(2\theta_i) + \beta \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$ pour $i = 1$ et 2 sont les triplets de la forme $(g(\beta), \beta, h(\beta))$ où

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\beta \rightarrow \frac{-\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \beta \sin(2\theta_2)}{1 - \cos(2\theta_2)} \quad \beta \rightarrow \frac{-\frac{\cos(2\theta_2)}{\rho_1^2} + \beta \sin(2\theta_2) + \frac{1}{\rho_2^2}}{1 - \cos(2\theta_2)}$$

III.E.2) On constate que g et h sont des fonctions polynômiales du premier degré de β de même coefficient dominant $\frac{\beta \sin(2\theta_2)}{1 - \cos(2\theta_2)}$.

Donc pour un triplet (α, β, γ) de la forme $(g(\beta), \beta, h(\beta))$,

$\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est un polynôme du second degré $P(\beta)$ dont le terme de plus haut degré est $-\beta^2$.

III.E.3) Comme $\mathcal{E}_2$ passe par P_1 et P_2 , $\alpha_2 = g(\beta_2)$ et $\gamma_2 = h(\beta_2)$.

L'aire d'une ellipse associée à (α, β, γ) est $\frac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$; donc elle est inférieure à celle de $\mathcal{E}_2$ lorsque $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est supérieur à $P(\beta_2)$ et si elle passe par P_1 et P_2 , lorsque $P(\beta) \geq P(\beta_2)$; c'est à dire quand $\beta \in [\beta_2, \beta_3]$ où β_3 est la seconde solution de l'équation du second degré $P(\beta) = P(\beta_2)$ d'inconnue β . En effet P est croissante sur $] -\infty, \frac{\beta_2 + \beta_3}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\beta_2 + \beta_3}{2}, +\infty[$. J'ai montré :

Un triplet (α, β, γ) est associé à une ellipse convenable passant par P_1 et P_2 d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si $\beta \in [\beta_2, \beta_3]$

III.E.4) Les ellipses convenables associées à (α, β, γ) passant par P_1 et P_2 d'aire minimale vérifient donc $[\beta_2, \beta_3]$ et un système d'inéquations linéaires du second degré, vérifié par β_2 , qui traduit

que chacun des P_i pour $i = 3, \dots, k$ est à l'intérieur de $\mathcal{E}_2$. Donc, elles vérifient $\beta \in K$, où K est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel P admet un minimum. Donc :

Parmi les ellipses convenables passant par P_1 et P_2 , il en existe une d'aire minimale.

III.F - On a vu qu'il existe des ellipses convenables d'aires minimales passant par deux points non alignés avec O . Le nombre de points P_i étant fini, il n'existe qu'un nombre fini d'ellipses convenables $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$, passant par deux points et d'aires minimales (pour les ellipses convenables passant par ces deux points), respectivement $a_1, \dots, a_p$. Prenons parmi ces ellipses l'une : $\mathcal{E}$, dont l'aire est $\min_{i \in \{1, \dots, p\}} a_i$.

Comme toute ellipse optimale passe par deux points non alignés avec O (sinon on pourrait d'après les questions III.C.1 et III.D.3 trouver une ellipse convenable d'aire inférieure), $\mathcal{E}$ est optimale. Donc :

Il existe une ellipse optimale et elle passe au moins par deux des points P_i

Partie IV - Unicité de l'ellipse optimale

IV.A -

IV.A.1) La section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $X = 0$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations respectives $\begin{cases} X = 0 \\ Z = Y \end{cases}$ et $\begin{cases} X = 0 \\ Z = -Y \end{cases}$.

De même, la section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $Y = 0$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations respectives $\begin{cases} Y = 0 \\ Z = X \end{cases}$ et $\begin{cases} Y = 0 \\ Z = -X \end{cases}$.

La section de $\mathcal{H}_0$ par le plan d'équation $Z = 1$ est le cercle d'équation $\begin{cases} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$.

IV.A.2)

$\mathcal{H}_0$ est un cône de révolution d'axe (ΩZ) et de sommet O

IV.A.3) Le triplet (α, β, γ) est associé à une ellipse si et seulement si $\gamma > 0$ et $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$.

Les points de coordonnées (α, β, γ) , associés à une ellipse, sont donc les points situés au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$.

IV.B -

IV.B.1)

$\mathcal{T}_i$ est un plan.

IV.B.2)

Les points de l'espace vérifiant $Z \leq X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2}$ sont situés en-dessous de $\mathcal{T}_i$.

IV.C -

IV.C.1)

$\mathcal{K}$ est donc l'ensemble des coordonnées des points situés au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$ et en-dessous des k plans $\mathcal{T}_i$.

IV.C.2) Soient M_1 et M_2 de coordonnées respectives (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) appartenant à $\mathcal{K}$. Leur milieu I a pour coordonnées $(u, v, w) = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)$.

On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\},$$

$$w - u \cos 2\theta_i - v \sin 2\theta_i - \frac{1}{\rho_i^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left(Z_1 - X_1 \cos 2\theta_i - Y_1 \sin 2\theta_i - \frac{1}{\rho_i^2} \right) \right. \\ \left. + \left(Z_2 - X_2 \cos 2\theta_i - Y_2 \sin 2\theta_i - \frac{1}{\rho_i^2} \right) \right] \end{cases}$$

D'où $w - u \cos 2\theta_i - v \sin 2\theta_i - \frac{1}{\rho_i^2} \leq 0$ et I est situé en-dessous des plans $\mathcal{T}_i$.

Par ailleurs, $|X_1 X_2 + Y_1 Y_2| \leq (X_1^2 + Y_1^2)^{1/2} (X_2^2 + Y_2^2)^{1/2}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
 $\leq Z_1 Z_2$

et

$$\begin{aligned} w^2 - u^2 - v^2 &= \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (Z_1^2 - X_1^2 - Y_1^2) + \frac{1}{4} (Z_2^2 - X_2^2 - Y_2^2) + \frac{1}{2} (Z_1 Z_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où I est situé au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$.

On a montré que :

Le milieu de $[M_1, M_2]$ appartient à $\mathcal{K}$

IV.D -

IV.D.1) La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $X = 0$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X = 0 \\ Z^2 - Y^2 = l \end{cases}$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère du plan $(\Omega Y Z)$ centrée en Ω et d'axe transverse (ΩZ) .

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Y = 0$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} Y = 0 \\ Z^2 - X^2 = l \end{cases}$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère du plan $(\Omega X Z)$ centrée en Ω et d'axe transverse (ΩZ) .

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Z = \sqrt{l}$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 0 \\ Z = \sqrt{l} \end{cases}$

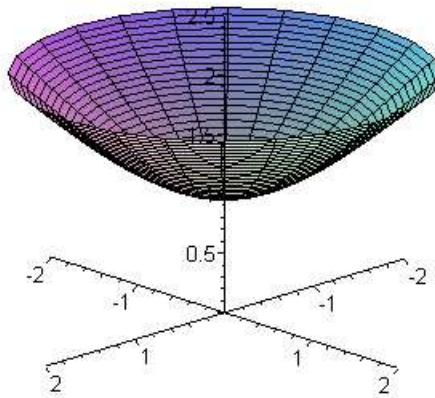
Cette section est réduite au point de coordonnées $(0, 0, \sqrt{l})$.

La section de $\mathcal{H}_l$ par le plan d'équation $Z = 2\sqrt{l}$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 3l \\ Z = 2\sqrt{l} \end{cases}$

On reconnaît le cercle du plan d'équation $Z = 2\sqrt{l}$ centré au point de coordonnées $(0, 0, 2\sqrt{l})$ de rayon $\sqrt{3l}$.

IV.D.2) $\mathcal{H}_l$ est un hyperboloïde à deux nappes, de révolution d'axe (ΩZ) .

IV.D.3)



IV.E -

IV.E.1) Le point M_3 est situé au-dessus de $\mathcal{H}_l^+$.

IV.E.2) Les points de $\mathcal{H}_l^+$ étant ceux qui vérifient $Z = \sqrt{l + X^2 + Y^2}$, les coordonnées de M_3 vérifient $\gamma_3 > \sqrt{l + \alpha_3^2 + \beta_3^2} \Leftrightarrow$ (puisque $\gamma_3 > 0$)

$$\boxed{\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 > l}$$

IV.F - Supposons qu'il y ait deux ellipses optimales distinctes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ associées respectivement aux deux triplets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et considérons l'ellipse $\mathcal{E}_3$ associée au triplet $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = \frac{1}{2}[(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)]$.

D'après IV.E., on a bien affaire à une ellipse car $\gamma_3 > 0$ et $\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 > l > 0$.

D'après IV.C.2), elle est encore convenable.

D'après IV.E.2), son aire est $\frac{\pi}{\sqrt{\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} < \frac{\pi}{\sqrt{l}} = \text{aire de } \mathcal{E}_1 = \text{aire de } \mathcal{E}_2$.

D'où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ne sont pas optimales. On a montré :

Il y a unicité de l'ellipse optimale.

V.F - Exemples

V.A.1) Si l'ellipse optimale n'était pas symétrique par rapport à Δ , sa symétrique par rapport à Δ serait aussi optimale, ce qui contredit son unicité. Donc :

L'ellipse optimale est symétrique par rapport à Δ

V.A.2)

a) $\{P_1, P_2\}$ est symétrique par rapport à (Ox) . Donc l'ellipse optimale est symétrique par rapport à (Ox) . Comme elle est centrée en O , elle est aussi symétrique par rapport à (Oy) .
Donc :

L'équation de l'ellipse optimale est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse optimale. Choisissons $a > 0$ et $b > 0$. P_1 et P_2 vérifient l'équation de $\mathcal{E}$. Donc

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{ ce qui montre que } \exists \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{a} = \cos \alpha \\ \frac{1}{b} = \sin \alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2}{\cos \alpha} \\ b = \frac{1}{\sin \alpha} \end{array} \right\}$$

D'où l'aire de $\mathcal{E}$ vaut $\frac{2\pi}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{4\pi}{\sin 2\alpha}$.

Cette aire est minimum quand $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ et

$$a = 2\sqrt{2} \text{ et } b = \sqrt{2}$$

V.B -

V.B.1) $P_4 \in [P_1, P_2]$. Il s'agit donc de vérifier que l'intérieur d'une ellipse est convexe. On peut le vérifier sur l'équation réduite dans un repère orthonormé : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ intérieurs à l'ellipse. Soit $M(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in [M_1, M_2]$ ($t \in [0, 1]$). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{(tx_1 + (1-t)x_2)^2}{a^2} + \frac{(ty_1 + (1-t)y_2)^2}{b^2} &= t^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) + (1-t)^2 \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right) \\ &\quad + 2t(1-t) \left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} \right) \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \left[\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right)^{1/2} \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \right] \\ &\quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = (t + (1-t))^2 = 1 \end{aligned}$$

D'où M est intérieur à l'ellipse.

Donc comme P_1 et P_2 sont intérieurs à l'ellipse optimale, P_4 l'est aussi et

Pour rechercher l'ellipse optimale, on peut supprimer le point P_4 .

V.B.2) P_1, P_2, P_3 ont pour coordonnées polaires respectives $(3, 0)$, $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$.

V.B.3) Les trois inégalités du III.A.2) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \gamma \leq \alpha + \frac{1}{9} \\ \gamma \leq \frac{\alpha}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{12} \\ \gamma \leq -\alpha + 4 \end{cases}$$

V.B.4) Soit $\mathcal{E}$ ellipse de centre O passant par P_1 et P_3 . Montrons qu'elle ne contient pas P_2 . D'après ce qui précède, si elle associée au triplet (α, β, γ) , l'on a :

$$\left. \begin{cases} \gamma = \alpha + \frac{1}{9} \\ \gamma = -\alpha + 4 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{37}{18} \\ \alpha = \frac{35}{18} \end{cases}$$

Or $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 > 0 \Rightarrow \beta^2 < \gamma^2 - \alpha^2 = \frac{37^2 - 35^2}{18^2} = \frac{4}{9}$, ce qui montre : $|\beta| < \frac{2}{3}$.

Par ailleurs P_2 intérieur à $\mathcal{E}$ équivaut à :

$$\begin{aligned} \gamma \leq \frac{\alpha}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{12} &\Leftrightarrow \frac{37}{18} - \frac{35}{36} - \frac{1}{12} \leq \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \beta \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Or β ne peut être à la fois inférieur à $\frac{2}{3}$ et supérieur ou égal à $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc :

Il n'existe pas d'ellipse de centre O , passant par P_1 et P_3 et contenant P_2 .

V.B.5) Lorsque P_1 et $P_2 \in \mathcal{E}$,

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \alpha + \frac{1}{9} \\ \gamma &= \frac{\alpha}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{12} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{18} + \beta \sqrt{3} \\ \alpha &= -\frac{1}{18} + \beta \sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

D'où $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{1}{18} + \beta \sqrt{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{18} + \beta \sqrt{3}\right)^2 - \beta^2 = -\beta^2 + \frac{2\beta\sqrt{3}}{9}$ et

$$\boxed{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -\beta^2 + \frac{2\beta\sqrt{3}}{9}}$$

V.B.6)

$$\boxed{\text{Cette expression est maximale pour } -2\beta + \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

V.B.7) On a alors :

$$\alpha = -\frac{1}{18} + \beta \sqrt{3} = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \text{ et}$$

$$\gamma = \frac{1}{18} + \beta \sqrt{3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

D'où l'équation de l'ellipse optimale :

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{2y^2}{3} - \frac{2\sqrt{3}xy}{9} = 1}$$

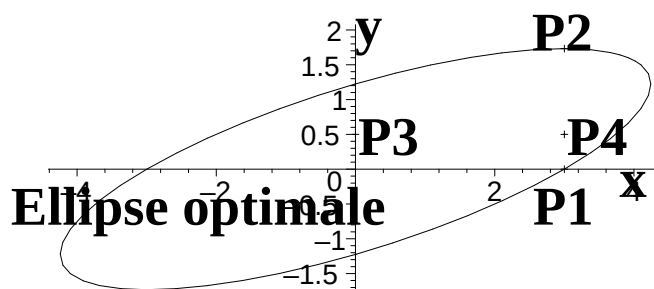
Cette équation est équivalente à :

$$\frac{1}{9}(x - y\sqrt{3})^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(x - y\sqrt{3})^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi], \begin{cases} \frac{x - y\sqrt{3}}{3} = \cos \varphi \\ \frac{y\sqrt{3}}{3} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = 3(\cos \varphi + \sin \varphi) \\ y = \sqrt{3} \sin \varphi \end{cases}$$

D'où la représentation :



△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr