ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1980

MATHEMATIQUES I
(Deux pages dactylographiées)

N.B. A condition d'admettre les résultats fournis par l'énoncé, les quatre parties du problème sont indépendantes.

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Une application $n \mapsto u_n$ d'une partie P de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée suite et notée $(u_n)_{n\in P}$; le symbole $\sum\limits_{n\in P} u_n$ désigne alors la série de terme général u_n.

L'objet du problème est l'étude de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}\operatorname{Log}|\cos n|$ et de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{|\sin n|}{n} x^n$

$(\alpha\in[1,+\infty[\ ,\ x\in\mathbb{R})$.

I

1) Montrer que l'équation différentielle $xy' + y + \operatorname{tg} x = 0$ admet une solution unique f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tout entier.

2) On suppose l'existence d'une suite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in I \qquad \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Montrer alors que f est développable en série entière sur I et exprimer les coefficients de ce développement en fonction des a_{2n+1}.

3) On pose $F(x) = \frac{1}{x}\operatorname{Log}|\cos x|$. Etudier cette fonction, tracer la courbe représentative; étudier la concavité sur l'intervalle I.
Sachant que $\pi \notin \mathbb{Q}$, montrer que F est définie sur $\mathbb{N}^*$; on pose $u_n = F(n)$.

II

1) On dit que A, partie de B, est dense dans B (partie de $\mathbb{R}$) si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad (]a,b[\cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (]a,b[\cap A \neq \emptyset)$$

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et A dense dans B ; montrer que $f(A)$ est dense dans $f(B)$.

2) On admettra le résultat suivant : tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ (avec $a \in \mathbb{R}^+$), soit dense dans $\mathbb{R}$.

Montrer que : a) $A = \{ n + 2k\pi,\ (n,k)\in \mathbb{Z}^2 \}$ est dense dans $\mathbb{R}$
b) $B = \{\cos n\ ,\ n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

3) a- La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
b- La suite $(\operatorname{Log}|\cos n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

III

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un et un seul entier $k_n \geqslant 1$ tel que :
$0 < | n-(2k_n - 1)\frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{2}$.
On pose : $k_n = k(n)$ et $|n-(2k(n)-1)\frac{\pi}{2}| = \varepsilon(n)$.

2) On admettra que :

$$\exists M \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \ : \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\} \qquad |\pi - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{q^M}$$

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $\qquad \varepsilon(n) \geqslant \dfrac{1}{2(2k(n)-1)^{M-1}}$

.../...

3) On pose $w_k = \frac{1}{(k-1)\pi}$ Log sin $\frac{1}{2(2k-1)^{M-1}}$

Etudier la convergence de la suite $(w_k)_{k\in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, puis de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} w_k$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie en I 3) ; comparer u_n et $w_{k(n)}$; en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $t_\alpha(n) = \frac{1}{n^\alpha}$Log $|\cos n|$. Etudier la convergence de la suite $(t_\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

6) Soit $g_n(x) = x^n \cos n$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$

a) en utilisant III 4)
b) en utilisant II

-La suite $\left(\frac{\cos(n+1)}{\cos n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

7) Utiliser III 2) pour montrer que la suite $\left(\frac{\text{Log}\,|\cos n|}{\text{Log}\, n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ est bornée et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} t_\alpha(n)$ converge si $\alpha > 1$.

IV.

Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $h_n(x) = (-1)^n \frac{|\sin n|}{n} x^n$.

1) En utilisant le résultat admis en III 2), étudier, pour $|x| > 1$, la convergence de la suite $(h_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n(x)$ est égal à 1.

2) On rappelle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos 2n}{n}$ est convergente.

En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n(-1)$.

3) Soit l une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue sur $]0,\pi[$, telle que, pour un $n\in\mathbb{N}$, l'expression $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi l(x)\cos nx\,dx$ ait un sens ; cette expression se note alors $a_n(l)$.

a) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}\, x \sin 2nx\,dx$, (On pourra utiliser $I_n + I_{n-1}$).

b) Soit L la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $L(x) = \text{Log}\,|\cos\frac{x}{2}|$.

Montrer que, pour tout entier n, $a_n(L)$ existe et calculer sa valeur. (Pour $a_0(L)$, on pourra introduire

$\int_0^\pi \text{Log}\sin\frac{x}{2}\,dx$).

c) On pose, pour tout x, $S(x) = |\sin x|$. Calculer $a_n(S)$.

4) On admet que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $S(x) = \frac{a_0(S)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(S)\cos nx$ et que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $L(x) = \frac{a_0(L)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(L)\cos nx$.

On pose $\psi(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4p^2-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2pn}{n}x^n\right)$.

a) Montrer que ψ est définie sur $]-1,+1[$.

b) Soit $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$ pour $x\in]-1,+1[$. Exprimer $h(x)$ en fonction de $\psi(x)$.

c) Utiliser III 7) pour montrer que ψ est définie en 1.

d) En déduire que $h(x)$ a une limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

*****
***