

# Concours Commun Mines-Ponts 2019 MP 1

1. Nous allons utiliser ici que le rayon de convergence d'une série entière est supérieur à tout réel  $x > 0$  en lequel cette série entière converge. Il suffira alors de montrer que ces séries entières convergent simplement sur  $\mathbb{R}_+$  pour affirmer que leurs rayons sont infinis.

Fixons  $x > 0$ , et posons  $u_n(x) = \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(1+n^{-1})^r x}{\prod_{k=1}^p (pn+k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(pn)^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La règle de D'Alembert nous assure alors que la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge. De même, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn}$  converge également puisque la suite des sommes partielles de cette dernière est égale à la suite des sommes partielles  $\sum_{n \geq 1} u_n(x^p)$  dont nous venons de prouver la convergence.

2.  $\triangleright \phi_x$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et sa dérivée en  $t > 1$  vaut

$$\phi'_x(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + t^{1-r}r(t-1)^{r-1} = (t-1)^{r-1}t^{-r}(t-(1-r)),$$

quantité dont le signe est positif puisqu'il est aussi celui de  $t - (1-r) > 1 - (1-r) = r > 0$ .  $\phi_x$  est par conséquent une fonction strictement croissante de  $\phi_x(1) = -x < 0$  à  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t) = +\infty$  ( $\phi_x(t)$  est en effet équivalente en  $+\infty$  à  $t$ ). D'après le théorème des valeurs intermédiaires ( $\phi_x$  est évidemment continue et  $]1, +\infty[$  est un intervalle) et sa stricte monotonie,  $\phi_x$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  dans  $[-x, +\infty[$  et s'annule par conséquent une et une seule fois, en un réel que nous noterons  $t_x > 1$ .

$\triangleright u_1(x) > 0 = u_0(x)$ . De plus, si  $n \geq 2$ ,

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = x^{n-1} \frac{n^r}{n!} \left( x - \left( \frac{n-1}{n} \right)^r n \right) = x^{n-1} \frac{n^r}{n!} (x - (n-1)^r n^{1-r}) = -x^{n-1} \frac{n^r}{n!} \phi_x(n).$$

D'après l'étude des variations de  $\phi_x$ , si  $n \leq \lfloor t_x \rfloor$ ,  $n \leq t_x$ , si bien que  $\phi_x(n) \leq 0$  et  $u_n(x) \geq u_{n-1}(x)$ . Si maintenant  $n > \lfloor t_x \rfloor$ , alors  $n > t_x$  et alors  $u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$ .

3.  $\triangleright$  Effectuons un développement limité de  $\phi_x(x+\alpha)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} \phi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x \left[ \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1 \right] \\ &= x \left[ \left(1 + \frac{\alpha(1-r)}{x}\right) \left(1 + \frac{r(\alpha-1)}{x}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \alpha - r + o(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha - r. \end{aligned}$$

$\triangleright$  Fixons  $\epsilon > 0$ . L'estimation  $\phi_x(x+r+\epsilon) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \epsilon > 0$  de la question précédente nous assure de l'existence d'un  $x_1 > 1$  tel que si  $x \in [x_1, +\infty[$ ,  $\phi_x(x+r+\epsilon) > \epsilon/2 > 0$ . D'après les variations de  $\phi_x$ , on en déduit que  $x+r+\epsilon > t_x$ . De plus, puisque  $\phi_x(x+r-\epsilon) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\epsilon < 0$ , il existe  $x_2 > 1$  tel que si  $x \in [x_2, +\infty[$ ,  $\phi_x(x+r-\epsilon) < -\epsilon/2 < 0$ , si bien que  $x+r-\epsilon < t_x$ . Tout réel  $x$  supérieur à la fois à  $x_1$  et à  $x_2$  vérifie par conséquent  $|t_x - x - r| \leq \epsilon$ . Ceci prouve que  $t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

4. ▷ Rappelons que  $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$ . Ainsi, si  $k \geq 1$ .

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \times \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k (\lfloor x \rfloor + j)} \sim 1^r \times \frac{x^k}{\lfloor x \rfloor^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Si  $k \leq -1$ , la preuve est identique car en posant  $j = -k$ ,  $\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \left(1 - \frac{j}{\lfloor x \rfloor}\right)^r \times \frac{\prod_{i=0}^{j-1} (\lfloor x \rfloor - i)}{x^j}$ .

▷ D'après l'équivalent que nous venons d'établir,

$$\frac{\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{u_{\lfloor x \rfloor - k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} n + 1.$$

Ainsi par définition même de cette limite, en posant  $\epsilon = 1$ , on voit qu'il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $x \geq A$ ,  $\left| \frac{\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} - n - 1 \right| \leq 1$ , soit en particulier  $\frac{\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \geq n + 1 - 1 = n$ .

5. ▷ Soit  $\epsilon > 0$  et un entier  $n \geq \epsilon^{-1}$ . L'inégalité précédente nous donne l'existence d'un  $A > 0$  tel que pour tout  $x > A$ ,

$$0 \leq u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \frac{x^r}{n} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq \frac{x^r}{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{n} \leq \epsilon x^r e^x,$$

ce qui prouve que  $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^r e^x)$ . Le premier item de la question 4./ nous garantit alors que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)$  est également négligeable devant  $x^r e^x$ .

Notons que l'estimation pour  $k = 0$  pouvait aussi s'obtenir avec l'équivalent de Stirling :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) = \frac{\lfloor x \rfloor^r}{\lfloor x \rfloor!} x^{\lfloor x \rfloor} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lfloor x \rfloor^r}{\sqrt{2\pi \lfloor x \rfloor} \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{e}\right)^{\lfloor x \rfloor}} x^{\lfloor x \rfloor} = \underbrace{o(\lfloor x \rfloor^r e^{\lfloor x \rfloor})}_{\text{car } \lfloor x \rfloor \rightarrow +\infty} = \underbrace{o(x^r e^x)}_{\text{car } \lfloor x \rfloor \leq x}.$$

▷ D'après la question précédente, quitte à prendre  $x$  suffisamment grand, on peut supposer que  $|t_x - x - r| < 1$ , soit  $-1 + x + r < t_x < 1 + x + r$ . Alors,

$$\underbrace{-1 + \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq -1 + x + r \leq t_x \implies -1 + \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor \leq \lfloor t_x \rfloor \quad (1)$$

De plus, la fonction "partie entière" étant croissante,

$$t_x < 1 + x + r \implies \lfloor t_x \rfloor \leq \lfloor 1 + x + r \rfloor = 1 + \lfloor x + r \rfloor \leq 2 + \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor. \quad (2)$$

Pour cette dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$ . Il suffit pour le voir d'écrire que  $a = \lfloor a \rfloor + \alpha$  et  $b = \lfloor b \rfloor + \beta$ , où  $0 \leq \alpha, \beta < 1$ , et d'en déduire que  $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \alpha + \beta < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$ .

Nous avons montré avec les estimations (1) et (2) que  $\lfloor t_x \rfloor = \lfloor x \rfloor + i$  où  $i \in \llbracket \lfloor r \rfloor - 1, \lfloor r \rfloor + 2 \rrbracket$ . Ceci est équivalent à l'indication suggérée entre parenthèses puisque  $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$ .

▷ Ainsi,  $\frac{M_x}{x^r e^x} = \max_{\lfloor r \rfloor - 1 \leq i \leq \lfloor r \rfloor + 2} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + i}}{x^r e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , en tant que maximum de quatre fonctions de  $x$  tendant toutes vers 0.

6. ▷ En tenant compte de la nullité de  $u_0(x)$  et de  $D_{n+1} - D_n = z^n$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) = S_{r,1}(zx).$$

Notons, par souci de précision, que ces séries convergent car  $\sum_n |u_n(x)|$  converge,  $(D_n)_n$  est bornée, et  $\sum_n (u_n - u_{n-1})$  converge aussi.

▷

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (zx)^n \frac{n^r}{n!} \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\ &= \frac{2}{|1 - z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|. \end{aligned}$$

Notons que cette dernière série converge bien car la suite  $(u_n(x))_n$  décroît vers 0. De plus, en utilisant son changement de monotonie en  $t_x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| &= \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x))}_{=u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)=M_x} + \underbrace{\sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x))}_{=u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)=M_x} = 2M_x. \end{aligned}$$

L'estimation  $S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x)$  est alors une conséquence immédiate de cette majoration et du deuxième item de la question 5.

7. ▷ Commençons par remarquer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^{p-1} \zeta^{kn} = \sum_{k=0}^{p-1} \left( \exp \frac{2i\pi n}{p} \right)^k$  est une somme géométrique. Elle est par conséquent égale à  $p$  lorsque  $n$  est un multiple de  $p$ , et à 0 dans le cas contraire car  $= \frac{1 - e^{2i\pi n}}{1 - e^{2i\pi n/p}}$ . L'interversion des deux sommes dans la ligne suivante est licite car l'une d'entre elles porte sur un nombre fini de termes :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} \sum_{k=0}^{p-1} \left( \exp \frac{2i\pi n}{p} \right)^k x^n = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \equiv 0 [p]}} \frac{n^r}{n!} p x^n,$$

et cette somme est égale, en posant  $n = pm$ , à  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{p^r m^r}{(pm)!} p x^{pm} = p S_{r,p}(x)$ .

▷ Pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $\zeta^k$  est un nombre complexe de module 1 différent de 1 si bien que d'après la question 6,  $\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = o(x^r e^x)$ . Or, nous venons de montrer que cette somme est égale à  $S_{r,1}(x) - pS_{r,p}(x)$ . Ainsi, si  $(H_{r,1})$  est vérifiée,  $S_{r,1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x$ , et on en déduit que  $pS_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) - (S_{r,1}(x) - pS_{r,p}(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x$ , i.e que  $(H_{r,p})$  est également vérifiée. L'autre implication fonctionne de même.

8. C'est une application de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, licite ici car  $X_x$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $x$ , et admet donc une variance et une espérance toutes deux égales à  $x$  :

$$\mathbf{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \leq \frac{\text{Var}(X_x)}{\alpha^2 x^{4/3}} = \alpha^{-2} x^{-1/3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

9. Attention au fait que les inégalités qui suivent portent sur des variables aléatoires :

$$0 \leq A_x = \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})} Z_x^r \leq \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})} 1^r = \mathbf{1}_{(X_x < x - x^{2/3})} \leq \mathbf{1}_{(|X_x - x| > x^{2/3})}$$

L'espérance étant une fonctionnelle croissante sur l'ensemble des variables aléatoires admettant une espérance, on obtient naturellement  $0 \leq \mathbf{E}(A_x) \leq \mathbf{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3})$ , et donc

$$\boxed{\mathbf{E}(A_x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \text{ d'après Q8.}$$

Puisque  $(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) = (1 - x^{-1/3} \leq Z_x \leq 1 + x^{-1/3})$ ,

$$\mathbf{1}_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})} (1 - x^{-1/3})^r \leq B_x \leq \mathbf{1}_{(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})} (1 + x^{-1/3})^r$$

d'où l'on tire en prenant à nouveau les espérances :

$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) (1 - x^{-1/3})^r \leq \mathbf{E}(B_x) \leq \mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) (1 + x^{-1/3})^r$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) (1 - x^{-1/3})^r = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Z_x - 1| > x^{-1/3}) = 1$  d'après Q8, et de même pour le terme de droite, on obtient  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(B_x) = 1}$ .

10. ▷  $Y_{N,x}$  est d'espérance finie car elle est positive et majorée par  $\prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k)$  qui est un polynôme en  $X_x$ . Puisque  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel, il suffit donc de justifier que  $X_x^k$  admet une espérance pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , i.e que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-x} \frac{x^n n^k}{n!}$  converge. Mais ceci est clair à nouveau grâce à D'Alembert puisque  $\frac{e^{-x} \frac{x^{n+1} (n+1)^k}{(n+1)!}}{e^{-x} \frac{x^n n^k}{n!}} = x \frac{(n+1)^{k-1}}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

▷

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{N,x}) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \mathbf{1}_{(j > x+x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (j-k) \right) \mathbf{P}(X_x = j) \text{ d'après le théorème de transfert} \\
&= \sum_{j=N}^{+\infty} \left( \mathbf{1}_{(j > x+x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (j-k) \right) \mathbf{P}(X_x = j), \text{ car } \prod_{k=0}^{N-1} (j-k) = 0 \text{ lorsque } j \leq N-1 \\
&= \sum_{\substack{j \geq N \\ j > x+x^{2/3}}} \left( \prod_{k=0}^{N-1} (j-k) \right) \mathbf{P}(X_x = j) = \sum_{\substack{j \geq N \\ j > x+x^{2/3}}} \left( \prod_{k=0}^{N-1} (j-k) \right) \frac{e^{-x} x^j}{j!} \\
&= \sum_{\substack{j \geq N \\ j > x+x^{2/3}}} \frac{j(j-1)\dots(j-N+1)}{j!} e^{-x} x^j = \sum_{\substack{j \geq N \\ j > x+x^{2/3}}} \frac{e^{-x} x^j}{(j-N)!} \\
&= \sum_{k > x+x^{2/3}-N} \frac{e^{-x} x^{N+k}}{k!} \text{ en posant } j = N+k \\
&= x^N \sum_{k > x+x^{2/3}-N} \frac{e^{-x} x^k}{k!} = x^N \mathbf{P}(X_x > x+x^{2/3}-N).
\end{aligned}$$

▷ Il existe  $A > 0$  tel que tout réel  $x > A$  vérifie  $x^{2/3} - N \geq x^{2/3}/2$ . Pour de tels  $x$ ,

$$\mathbf{P}(X_x > x+x^{2/3}-N) = \mathbf{P}(X_x - x > x^{2/3}-N) \leq \mathbf{P}(|X_x - x| > x^{2/3}-N) \leq \mathbf{P}(|X_x - x| > (1/2)x^{2/3}),$$

quantité qui tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow +\infty$  d'après la question 8, en posant  $\alpha = 1/2$ . Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)}.$$

11. ▷ L'hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}_N[X]$  des polynômes s'annulant en 0 contient les vecteurs de la famille  $\mathcal{F} = (H_1, H_2, \dots, H_n)$  où pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $H_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1)$ . Or, cette famille est libre puisque ses vecteurs sont de degrés distinct deux à deux et elle contient  $N = \dim \mathcal{H}$  vecteurs.  $\mathcal{F}$  est donc une base de  $\mathcal{H}$ . Puisque  $X^N \in \mathcal{H}$ , il existe bien des réels  $a_1, \dots, a_N$  tels que  $X^N = \sum_{k=1}^N a_k X(X-1)\dots(X-k+1)$ . Ainsi,

$$\mathbf{1}_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k \underbrace{\mathbf{1}_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x(X_x-1)\dots(X_x-k+1)}_{=Y_{k,x}}$$

$$\begin{aligned}
\text{▷ } \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N \right) &= x^{-N} \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N \right) = x^{-N} \sum_{k=1}^N a_k \underbrace{\mathbf{E}(Y_{k,x})}_{=o(x^k) \in o(x^N)} = o(1) \text{ quand} \\
&x \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

12. ▷ Soit  $N$  un entier supérieur à  $r$ . Lorsque  $z > 1+x^{-1/3}$ ,  $z > 1$  et donc  $z^r < z^N$ . On en déduit l'inégalité  $0 \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N$ , et donc  $0 \leq \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r \right) \leq \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N \right)$ . La question précédente induit ainsi  $\mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

▷ Puisque  $Z_x^r = A_x + B_x + \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r$ , on déduit bien de la question 9 et du premier item de cette question 12 que  $\mathbf{E}(Z_x^r) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

▷  $\mathbf{E}(Z_x^r) = x^{-r} \mathbf{E}(X_x^r) = x^{-r} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r x^n}{n!}$  tend vers 1, i.e  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x x^r$ .

13. ▷ Puisque  $(p(n+1))^r \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (pn)^r$  et  $(p(n+1))! = [\prod_{k=0}^{p-1} (p(n+1) - k)] (pn)! \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (pn)^p (pn)!$ , en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}$  et  $b_n = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}$ , ces deux suites sont bien équivalentes et strictement positives pour  $n \geq 1$ . De plus,  $\sum_n b_n y^n$  est une série entière de rayon de convergence infini puisque  $0 \leq b_n \leq \frac{(pn)^r}{(pn)!}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} y^n$  a déjà un rayon infini d'après la question 1. On déduit du lemme de comparaison asymptotique des séries entières que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} y^n \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} y^n$ . En posant  $y = x^p$ , on obtient

$$S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} x^{np} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} x^{np} = x^p S_{r-p,p}(x).$$

▷ Ainsi, si  $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{p}$ ,  $S_{r-p,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{-p} S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{r-p} e^x}{p}$ , ce qui est exactement l'énoncé de  $(H_{r-p,p})$ .

▷ On sait grâce à la question 12 que pour tout réel  $r > 0$ ,  $(H_{r,1})$  est valide. Grâce à la question 7, on en déduit que  $(H_{r,p})$  est valide pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $r > 0$ . Il reste à prouver que c'est encore valide lorsque  $r \leq 0$ . Or pour un tel réel  $r$ ,  $r + p$  est un entier strictement positif si on pose  $p = -\lfloor r \rfloor + 1$ , si bien que  $(H_{r+p,p})$  est vérifié, et donc  $(H_{r,p})$  l'est aussi.

14.  $v_n - v_{n-1} = \ln n + x \ln \frac{n-1}{n} - \ln(x+n) = -\ln(1 + \frac{x}{n}) - x \ln(1 - \frac{1}{n}) = (\frac{x}{n}) - x(-\frac{1}{n}) + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$  est bien le terme général d'une série absolument convergente. On sait que ceci induit la convergence de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$ . La suite  $(e^{v_n})_{n \geq 1}$  converge donc aussi vers un réel  $\Gamma(x) > 0$  en tant qu'exponentielle d'un réel (on utilise ici la continuité de la fonction exponentielle, mais au vu de la difficulté des questions précédentes, nul doute qu'on nous en fera grâce). Puisque  $v_n = \ln \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ , on a bien  $\prod_{k=0}^n (x+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{\Gamma(x)}$ .

15. Enfin une question simple : c'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2, à coefficients continus sur  $\mathbb{R}$ , résolues (ouf !), ce qu'est celle-ci.

16. Supposons que cette EDL admette une solution développable en série entière  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  de rayon de convergence infini telle que  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ . Alors, la dérivée seconde de  $f$  est égale sur  $\mathbb{R}$  à  $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) t^{n-2}$  d'après un résultat classique sur les séries entières, et en injectant dans l'EDL, on trouve que pour tout réel  $t$ ,  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$ , soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n$ . Par unicité du développement en série entière (le rayon est bien non nul), on en déduit la nullité de  $a_2$  et l'égalité  $a_{n+2} (n+2)(n+1) = a_{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Or,  $a_1$  et  $a_2$  étant nuls, une récurrence bête nous informe que  $a_n$  l'est aussi dès que

$n$  est congru à 1 ou 2 modulo 3. De plus, si  $n = 3k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{3k} = \frac{a_{3k-3}}{3k(3k-1)}$ , soit

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{3n} = \left( \prod_{k=1}^n (3k)(3k-1) \right)^{-1} = \left( 3^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2) \right)^{-1}.$$

Réciproquement, si on pose  $g : t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2)}$ , cette fonction est bien définie car le rayon de convergence de la série entière est égal à  $+\infty$ , d'après la règle de D'Alembert (je vous laisse le vérifier). De plus, nos calculs se remontent sans obstacle, si bien que  $g$  est une solution de l'équation différentielle valant 1 en 0 et de dérivée nulle en 0. D'après la question 15,  $f$  est égale à  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . On a bien montré que  $f$  était développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

17.  $\triangleright \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2) = 3^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3^n n^{2/3} (n-1)!}{\Gamma(2/3)}$  d'après la question 14. Ainsi,

$$a_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( 3^n n! \frac{3^n n^{2/3} (n-1)!}{\Gamma(2/3)} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(2/3) n^{1/3}}{9^n (n!)^2}.$$

$\triangleright$  D'après l'équivalent de Stirling,  $(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$  et  $(n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$ , si bien que  $\frac{1}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{(2n)! \sqrt{\pi n}}$ , et en injectant dans la formule du premier item de cette question, nous obtenons bien que  $a_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{-1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$ .

18. D'après le lemme de comparaison asymptotique des séries entières et l'équivalent qui précède,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n} t^{3n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} t^{3n} = \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-1/6}}{(2n)!} \left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{2n} \\ &= \frac{2^{1/6} \Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!} \left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{2n} = \frac{2^{1/6} \Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} S_{-1/6,2} \left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{1/6} \Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{-1/6} \exp\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) = C t^{-1/4} \exp\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) \\ \text{où } &\boxed{C = \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}}. \end{aligned}$$