Ecole des Ponts ParisTech...

Correction de la 2ème épreuve ; Filière PSI 2015

Olivier HALGAND

I - Le groupe symplectique

1. Le calcul donne : $J^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$ et ${}^tJ = -J$.

On en déduit que : $J.(-J) = I_{2n}$ et donc que : $\boxed{J \text{ est inversible et } J^{-1} = -J = {}^tJ.}$

2. On a donc :

$$ {}^tJ.J.J = ({}^tJ.J).J = I_{2n}.J = J \quad \text{donc :} \quad \boxed{J \in \mathcal{S}p_{2n}.}$$

De plus, pour tout réel α :

$$ {}^tK(\alpha).J.K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -In \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix},$$

donc :

$$ {}^tK(\alpha).J.K(\alpha) = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J \quad \text{et :} \quad \boxed{K(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}.}$$

3. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. Alors ${}^tU$ est inversible et $({}^tU)^{-1} = {}^t(U^{-1}) = {}^tU^{-1}$, donc :

$$ {}^tL_U.J.L_U = \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -{}^tU \\ U^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$ {}^tL_U.J.L_U = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J \quad \text{et :} \quad \boxed{L_U \in \mathcal{S}p_{2n}.}$$

4. Soit $M \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors : $J = {}^tM.J.M$ et donc :

$$ \det(J) = \det\left({}^tM.J.M\right) = \det {}^tM.\det J.\det M = \det J.(\det M)^2.$$

Or :

$$ \det J = \det \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = (-1)^n.(-1)^n = 1 \neq 0,$$

et on peut donc écrire : $(\det M)^2 = 1$. Donc :

$$\boxed{\text{si } M \in \mathcal{S}p_{2n}, \text{ alors : } \det M = \pm 1.}$$

5. Soient $M, N \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors :

$$ {}^t(M.N).J.(M.N) = ({}^tN.{}^tM)J.(M.N) = {}^tN.({}^tM.J.M).N = {}^tN.J.N = J,$$

donc :

$$\boxed{\text{le produit de deux éléments de } \mathcal{S}p_{2n} \text{ est encore un élément de } \mathcal{S}p_{2n}.}$$

6. Soit $M \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors $\det M = \pm 1$ et donc M est inversible. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} {}^tM.J.M = J \quad & \Leftrightarrow \quad {}^tM^{-1}({}^tM.J.M)M^{-1} = {}^tM^{-1}.J.M^{-1} \\ & \Leftrightarrow \quad ({}^tM^{-1}.{}^tM).J.(M.M^{-1}) = {}^t(M^{-1}).J.M^{-1} \\ & \Leftrightarrow \quad J = {}^t(M^{-1}).J.M^{-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{si } M \in \mathcal{S}p_{2n}, \text{ alors } M \text{ est inversible et } M^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}.}$$

7. Soit $M \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors, $M^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}$ et donc : $J = {}^tM^{-1}.J.M^{-1}$. On obtient donc :

$$J^{-1} = \left({}^tM^{-1}.J.M^{-1}\right)^{-1} = M.J^{-1}.{}^tM \quad \text{d'où :} \qquad -J = M(-J){}^tM.$$

On en tire : $J = {}^t\left({}^tM\right).J.{}^tM$, et donc :

$$\boxed{\text{si } M \in \mathcal{S}p_{2n}, \text{ alors } {}^tM \in \mathcal{S}p_{2n}.}$$

8. Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^tM.J.M &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tC & -{}^tA \\ {}^tD & -{}^tB \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tC.A - {}^tA.C & {}^tC.B - {}^tA.D \\ {}^tD.A - {}^tB.C & {}^tD.B - {}^tB.D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque ${}^tC.B - {}^tA.D = -{}^t\left({}^tD.A - {}^tB.C\right)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}p_{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} {}^tC.A - {}^tA.C = 0_n \\ {}^tD.A - {}^tB.C = I_n \\ {}^tD.B - {}^tB.D = 0_n \end{cases}}$$

II - Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

9. De manière évidente, I_{2n} et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{S}p_{2n}$. De plus, ces deux matrices commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_{2n}$, donc en particulier avec les matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$. Donc :

$$\boxed{\left\{I_{2n}, -I_{2n}\right\} \subset \mathcal{S}p_{2n}.}$$

10. Avec les notations de **2.**, on a : $L = {}^tK(-1)$ et donc $L \in \mathcal{S}p_{2n}$ d'après **2.** et **7.** D'où :

$$L.M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad M.L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix}.$$

Donc, si $M \in \mathcal{Z}$ alors $L.M = M.L$ et donc : $\boxed{C = 0_n \text{ et } A = D.}$

De même, ${}^tL \in \mathcal{S}p_{2n}$ et :

$${}^tL.M = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+C & B+D \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad M.{}^tL = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ C+D & D \end{pmatrix}.$$

Donc, si $M \in \mathcal{Z}$ alors ${}^tL.M = M.{}^tL$ et donc : $\boxed{B = 0_n \text{ et } A = D.}$

Ainsi, M est de la forme : $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$. On en déduit que $\det M = (\det A)^2 = 1$ d'après **4.** On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$; alors $L_U \in \mathcal{S}p_{2n}$ et :

$$L_U.M = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U.A & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1}.A \end{pmatrix}$$

$$\text{et :} \qquad M.L_U = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.U & 0_n \\ 0_n & A.{}^tU^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc, si $M \in \mathcal{Z}$ alors $L_U.M = M.L_U$ et donc : $\boxed{A.U = U.A.}$

12. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors :

- Si $i \neq j$, alors $I_n + E_{ij}$ est inversible et $\left(I_n + E_{ij}\right)^{-1} = I_n - E_{ij}$;
- si $i = j$, alors $I_n + E_{ij}$ est inversible et $\left(I_n + E_{ij}\right)^{-1} = I_n - \dfrac{1}{2}E_{ij}$.

Ainsi, dans tous les cas, $(I_n + E_{ij}) \in \mathcal{G}_n$. Or, A commute avec toute matrice de $\mathcal{G}_n$, dans avec les $I_n + E_{ij}$, et donc avec les E_{ij}. Ainsi, A commute avec toute combinaison linéaire des E_{ij}, donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n$. Ainsi, A est une matrice scalaire (non nulle), c'est-à-dire : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Or, $\det A = \det(\lambda I_n) = \lambda^n = \pm 1$, donc : $\lambda = \pm 1$ et ainsi : $A = \pm I_n$. Finalement : $\boxed{A \in \left\{I_n, -I_n\right\}}$ et donc :

$$\boxed{\text{le centre de } \mathcal{S}p_{2n} \text{ est : } \mathcal{Z} = \left\{I_n, -I_n\right\}.}$$

III - Déterminant d'une matrice symplectique

13. On suppose D inversible. On a alors les équivalences :

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} * \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & U + QV \\ B & = & QW \\ C & = & V \\ D & = & W \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} V & = & C \\ W & = & D \\ Q & = & B.D^{-1} \\ U & = & A - B.D^{-1}C \end{array} \right.}$$

14. • D'après **8.** et puisque $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, on doit avoir : ${}^tD.B = {}^tB.D$, donc :

$${}^t\left({}^tD.B.D^{-1}\right) = {}^tD^{-1}.{}^tB.D = {}^tD^{-1}.{}^tD.B = B.$$

On en déduit donc que : ${}^tD.BD^{-1} = {}^tB$ et donc :

$$B.D^{-1} = {}^tD^{-1}.{}^tB = {}^t\left(B.D^{-1}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la matrice } B.D^{-1} \text{ est symétrique.}}$$

• De plus, toujours d'après **8.**, on a aussi : ${}^tA.D - {}^tC.B = I_n$ et donc : $\det({}^tA.D - {}^tC.B) = 1$. D'après **13.**, on a aussi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} . \det \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \left(\det(I_n).\det(I_n)\right).\left(\det(U).\det(W)\right) = \det(U).\det(W) \\ &= \det(A - B.D^{-1}C).\det(D) = \det({}^tA - {}^tC.B.D^{-1})\det(D) \qquad \text{car } B.D^{-1} \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\det(M) = \det({}^tA.D - {}^tC.B) = 1.}$$

15. Par hypothèse :

$$(Q - s_1P).V_1 = 0 \quad \text{donc :} \quad Q.V_1 = s_1P.V_1 \quad \text{et, de même : } Q.V_2 = s_2P.V_2.$$

On a donc :

$$(Q.V_1 \mid Q.V_2) = (s_1P.V_1 \mid Q.V_2) = s_1{}^t(P.V_1).(Q.V_2) = s_1{}^tV_1{}^tP.Q.V_2,$$

et de même :

$$(Q.V_1 \mid Q.V_2) = (Q.V_1 \mid s_2P.V_2) = s_2{}^t(Q.V_1).(P.V_2) = s_2{}^tV_1{}^tQ.P.V_2.$$

Or, par hypothèse, ${}^tP.Q$ est symétrique, donc : ${}^tP.Q = {}^tQ.P$, d'où : $(Q.V_1 \mid Q.V_2) = s_2 {}^tV_1.{}^tP.Q.V_2$. On en déduit donc que :

$$(s_1 - s_2){}^tV_1.{}^tP.Q.V_2 = 0 \quad \text{donc :} \quad {}^t(P.V_1).Q.V_2 = 0,$$

et donc :

$$\boxed{(Q.V_1 \mid QV_2) = 0.}$$

16. On suppose maintenant que D n'est pas inversible. Considérons $V \in KerB \cap KerD$. Alors, d'après **8.** :

$${}^tA.D - {}^tC.B = {}^t({}^tD.A - {}^tB.C) = {}^tI_n = I_n \quad \text{donc :} \quad ({}^tA.D - {}^tC.B)(V) = I_n.V = V.$$

On a donc :

$$V = {}^tA.D.V - {}^tC.B.V = {}^tA.0 - {}^tC.0 = 0.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{KerB \cap KerD = \{0\}.}$$

17. • Supposons qu'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que : $D.V_i = 0$. Alors, $-s_iB.V_i = 0$ et puisque $s_i \neq 0$, on obtient : $B.V_i = 0$. Ainsi, $V_i \in KerB \cap KerD = \{0\}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!], \quad D.V_i \neq 0.}$$

• D'après **15.**, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$ tels que $i \neq j$, on a : $(D.V_i \mid D.V_j) = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs $D.V_i$ et $D.V_j$ sont orthogonaux. On en déduit que la famille $\big(D.V_i, i \in [\![1, m]\!]\big)$ est une famille orthogonale. Donc :

$$\boxed{\text{la famille } \big(D.V_i, i \in [\![1, m]\!]\big) \text{ est libre.}}$$

18. Raisonnons par l'absurde en supposant que, quel que soit le réel α, $D - \alpha B$ ne soit pas inversible. Considérons $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ des réels non nuls et deux à deux distincts. Alors, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $D - s_iB$ n'est pas inversible donc $Ker(D - s_iB) \neq \{0\}$. Considérons alors un vecteur non nul $V_i \in Ker(D - s_iB)$. Alors, d'après **17.**, la famille $\big(D.V_i, i \in [\![1, n+1]\!]\big)$ est libre, ce qui est impossible puisque $dim\mathbb{R}^n = n$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$ possède au plus n vecteurs. On aboutit donc à une contradiction. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un réel non nul } \alpha \text{ tel que } D - \alpha B \text{ soit inversible.}}$$

19. Considérons une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors :

• Si D est inversible, d'après **14.** on a : $\det(M) = 1$.

• Si D n'est pas inversible, alors d'après **18.**, il existe un réel non nul α tel que $D - \alpha B$ soit inversible. Or, d'après **2.**, $K(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}$ et donc, d'après **5.** : $K(\alpha).M \in \mathcal{S}p_{2n}$. Or :

$$K(\alpha).M = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \alpha A & D - \alpha B \end{pmatrix}.$$

On peut donc appliquer les résultats de **13.** et **14.** à $K(\alpha).M$ et donc : $\det\big(K(\alpha).M\big) = 1$. Or, $\det\big(K(\alpha)\big) = 1$, donc $\det(M) = 1$.

• On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{S}p_{2n}, \quad \det(M) = 1.}$$