

Concours d'Admission 1977

( Deux pages dactylographiées )

MATHEMATIQUES II



Un espace affine euclidien  $E_1$  est muni d'un repère  $r_1$ , d'origine  $O_1$  et de base orthonormée  $b_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ ; les coordonnées dans ce repère seront notées :  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Un espace affine euclidien  $E$ , mobile par rapport à  $E_1$ , est muni d'un repère  $r$ , d'origine  $O$  et de base orthonormée  $i = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de même sens que  $b_1$ ; les coordonnées dans ce repère seront notées :  $(x, y, z)$ .

On pose :  $\vec{O_1O} = u \vec{i}_1 + v \vec{j}_1 + w \vec{k}_1$ ,  $u, v, w$  étant des fonctions dérivables du temps  $t$ , qui décrit  $\mathbb{R}_+$ . On désigne par  $C$  la trajectoire de  $O$ .

On note à l'instant  $t$  :

$T_1$  le tenseur de distribution des vitesses des points de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $E_1$  ;

$\vec{\Omega}_1$  le vecteur rotation instantanée de  $T_1$  ;

$D_1$  l'axe central de  $T_1$  ;

$h\vec{\omega}_1$  le vecteur vitesse des points de  $E_1$  ;

$S_1$  (resp.  $S$ ) la surface engendrée par  $D_1$  relativement à  $E_1$  (resp. à  $E$ ) quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}_+$ .

On suppose qu'à tout instant  $O$  appartient à  $D_1$  et que  $\vec{\Omega}_1 = \vec{k}_1 + \vec{i}$ .

On suppose enfin que  $h$  est une fonction positive et dérivable de  $t$ .

1-1 Déterminer les composantes de  $\vec{i}$  dans  $b_1$  sachant qu'à l'instant  $t = 0$  :  $\vec{i} = \vec{i}_1$ .

1-2 Déterminer les composantes de  $\vec{j}$  dans  $b_1$  sachant qu'à l'instant  $t = 0$  :  $\vec{j} = \vec{k}_1$ .

On pourra, par exemple, montrer que  $\vec{j}$  appartient au plan déterminé par  $\vec{k}_1$  et  $\vec{u} = \vec{k}_1 \wedge \vec{i}$ , poser  $\vec{j} = \vec{u} \cos \theta + \vec{k}_1 \sin \theta$  et déterminer  $\theta$ , fonction dérivable de  $t$ .

Ecrire la matrice de passage de  $b_1$  à  $b$ .

2-1 Lorsque  $O$  est fixe par rapport à  $E_1$ , caractériser  $S_1$  et  $S$ .

2-2 Dans tout ce qui suit, On suppose que, quel que soit  $t$ ,  $h$  est strictement positif.

Quel est le rôle de  $D_1$  relativement à  $C$  ?

Déterminer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion de  $C$  en  $O$  en fonction de  $t$  et de  $h$ ,  $C$  étant orientée dans le sens des  $t$  croissants.

2-3 Caractériser la surface  $S$ .

2-4 Que peut-on dire des plans tangents à  $S_1$ , à l'instant  $t$ , aux différents points de  $D_1$  distincts de  $O$  ? Quel est le rôle, à l'instant  $t$ , du plan osculateur en  $O$  à  $C$  pour la surface  $S_1$  ?

3. On considère un point  $A$ , variable sur  $D_1$  :

$$\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + f \vec{\Omega}_1,$$

$f$  étant une fonction de  $t$ , non nulle et dérivable.

A un solide  $\Sigma$ , mobile par rapport à  $E_1$  et par rapport à  $E$ , est associé un repère  $R$

d'origine A et de base orthonormée  $B = ( \vec{I}, \vec{J}, \vec{K} )$  de même sens que  $b_1$ , avec :  $\vec{I} = \frac{\vec{\Omega}_1}{\|\vec{\Omega}_1\|}$  et  $\vec{J}$  normal en A à S et tel que  $\vec{k}_1 \cdot \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Les coordonnées dans ce repère seront notées  $( X, Y, Z )$ .

3-1 On considère le mouvement de  $\Sigma$  par rapport à  $E_1$  ; déterminer le vecteur rotation instantanée  $\vec{\Omega}_2$  et l'axe central  $D_2$  du torseur  $T_2$  de distribution des vitesses des points de  $\Sigma$  dans ce mouvement, à l'instant t.

A quelle condition nécessaire et suffisante, liant h et f', les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont-elles concourantes ? Quel est alors leur point commun ? Que peut-on dire alors de  $T_2$  et de la position de  $D_2$  relativement à  $\Sigma$  ?

3-2 On considère le mouvement de  $\Sigma$  par rapport à E : déterminer le vecteur rotation instantanée  $\vec{\Omega}_3$  et l'axe central  $D_3$  du torseur  $T_3$  de distribution des vitesses des points de  $\Sigma$  dans ce mouvement à l'instant t.

Quelle condition nécessaire et suffisante f doit-elle vérifier pour que  $D_1$  et  $D_3$  soient concourantes ? Quel est alors leur point commun ? Que peut-on dire alors de  $T_3$  et de  $D_3$  ?

3-3 Vérifier le théorème de "composition des vitesses" d'un point quelconque M de  $\Sigma$ .

3-4 On suppose que  $D_1$  et  $D_2$  sont concourantes et que h est une constante non nulle ; que peut-on dire alors de C et de la trajectoire de A ?

oooooooooooo

ooooooo

oo