

# CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2024

## CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 MP.MPI

m.laamoum2@gmail.com <sup>1</sup>

### Inégalité de Carleman

#### I Inégalité de Knopp

##### I.A - Deux inégalités intégrales

##### I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

**Q 1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle  $J$ . La somme de Riemann uniforme est donnée par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

on sait que  $R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ .

$\varphi$  est continue et convexe sur  $J$ , donc

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{b-a} R_n(f)\right) &= \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \quad (\text{inégalité de convexité généralisée}) \\ &\leq \frac{1}{b-a} R_n(\varphi \circ f) \end{aligned}$$

$\varphi \circ f$  est continue par morceaux donc  $R_n(\varphi \circ f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$ , par passage à la limite on obtient :

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt}$$

##### I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.

Pour tout  $x > 0$ , on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x} g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$$

**Q 2.**  $f$  est bornée sur  $[0, 1]$ , soit  $M = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$ , donc pour tout  $x \in [0, 1]$  on a

$$0 \leq g(x) \leq M \frac{1}{x} \int_0^x t dt = M \frac{x}{2}$$

donc  $\boxed{g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$ .

<sup>1</sup><https://tinyurl.com/2qyzrbd>

**Q 3.** Écrivons  $g(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$  avec  $\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{x} t f(t) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) \end{cases}$ .

- $f$  est strictement positive donc  $|\varphi_x(t)| \leq f(t)$ , par suite  $\varphi_x$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n > t$  on a  $\varphi_n(t) = \frac{t f(t)}{n}$  donc la suite de fonction  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}^{*+}$ .

Le théorème de la convergence dominée donne  $g(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- Soit  $x > 0$  et  $N = E(x)$ , on a  $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{N} \int_0^{N+1} t f(t) dt = \frac{N+1}{N} g(N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

D'où  $\boxed{g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$ .

**Q 4.** Remarquons que l'application  $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$  est continue mais pas dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , elle est dérivable en tout point de continuité de  $f$ .

Notons  $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite croissante des points de discontinuités de  $f$  dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , l'application  $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+} \setminus A$ .

Soit  $[y, x] \subset \mathbb{R}^{*+} \setminus A$ , on a

$$\int_y^x h(u) du = \left[ -\frac{1}{u} \int_0^u t f(t) dt \right]_y^x + \int_y^x f(u) du = g(y) - g(x) + \int_y^x f(u) du$$

la continuité de  $g$  et  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  donne :

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} h(u) du = g(a_n) - g(a_{n+1}) + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(u) du \quad \text{et} \quad \int_0^{a_0} h(u) du = -g(a_0) + \int_0^{a_0} f(u) du$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^{*+} \setminus A$ , la relation de Chasles donne

$$\int_0^x h(u) du = -g(x) + \int_0^{a_0} f(u) du$$

Ainsi l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(x) dx$  converge et  $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} h(x) dx}$

### ***I.B - Démonstration de l'inégalité de Knopp***

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Q 5.** La fonction exponentielle est convexe, d'après Q1 on a pour tout  $x > 0$ ,

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt\right) \leq \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$$

écrivons

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt\right) &= \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt + \frac{1}{x} \int_0^x \ln(t) dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt + \ln(x) - 1\right) \\ &= \frac{x}{e} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) \end{aligned}$$

ce qui donne  $\boxed{\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x t f(t) dt}$

**Q 6.** Pour tout  $x > 0$  on a  $\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq eh(x)$ ,  $h$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc la fonction  $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} h(x)dx = e \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

d'où le résultat .

### **I.C- Application à l'inégalité de Carleman**

On suppose dans cette sous-partie que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note  $f$  la fonction en escalier qui, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , est égale à  $a_k$  sur l'intervalle  $[k-1, k[$ .

**Q 7.** Soit  $k \geq 2$ , on a pour  $x \in [k-1, k]$

$$v_k(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} (\ln(a_i) - \ln(a_k)) + 1$$

or  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante donc  $\sum_{i=1}^{k-1} (\ln(a_i) - \ln(a_k)) > 0$  par suite  $v_k$  est décroissante sur  $[k-1, k]$  et elle est minimale pour  $x = k$ .

**Q 8.** Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $x \in [k-1, k]$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i-1}^i \ln(f(t))dt + \frac{1}{x} \int_{k-1}^x \ln(f(t))dt \\ &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{1}{x} (x - (k-1)) \ln(a_k) \\ &= v_k(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx &= \int_{k-1}^k \exp(v_k(x)) dx \\ &\geq \exp(v_k(k)) \quad (\text{d'après Q.7}) \end{aligned}$$

or  $v_k(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)$  d'où

$$\boxed{\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \geq \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right)}$$

**Q 9.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante et strictement positive, telle que  $\sum a_n$  converge, donc la fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

On a

$$\exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx = V_k$$

d'après Q.6 la fonction  $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc la série  $\sum V_k$  converge, par

suite la série  $\sum \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{\frac{1}{k}}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \int_0^{+\infty} \exp \left( \frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt \right) dx \leq e \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$\text{d'où } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

**Q 10.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite strictement positive, telle que la série  $\sum a_n$  converge, donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et elle est bornée.

- On construit une  $\sigma$  permutation de  $\mathbb{N}^*$  telle que la suite  $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

En effet il n'existe qu'un nombre fini d'indices  $n \geq 1$  tels que  $a_n \geq a_1$ , sinon la série  $\sum a_n$  ne serait pas convergente. Il existe donc un indice  $n_1$  tel que  $\forall n \geq 1, a_n \leq a_{n_1}$ , on pose alors  $\sigma(1) = n_1$ . On définit ensuite de proche en proche  $\sigma(k) = n_k$  tel que  $n_k \notin \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$  et  $a_{n_k} = \max_{n \notin \{n_1, \dots, n_{k-1}\}} a_n$ .

- La famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable donc  $\sum a_n$  est commutativement convergente, ainsi la série  $\sum a_{\sigma(n)}$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

D'après la question Q9 appliquée à la suite  $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on ordonne les termes de la famille  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ , de façon décroissante, et on les note  $a_{1,n} \geq \dots \geq a_{n,n}$ , pour ordonner de même la famille  $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ , soit chaque  $a_{i,n}$  garde sa valeur soit il est remplacé par un terme plus grand, donc  $a_{i,n} \leq a_{i,n+1}$ , ce qui donne aussi  $a_{i,n} \leq a_{\sigma(i)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Par conséquent on a

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n a_{k,n} \leq \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

## II Inégalité de Carleman

### II. A - Inégalité arithmético-géométrique

**Q 11.** On a pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $U_n$

$$\text{grad} f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n x_k, \dots, \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n x_k \right) = f(x) \left( \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right)$$

et

$$\text{grad} g_s(x) = (1, \dots, 1)$$

**Q 12.** On a  $X_s = g_s^{-1}(\{0\})$  et  $X_s \subset [0, s]^n$  donc il est fermé et borné, par suite  $X_s$  est compact, donc  $f$  est bornée sur  $X_s$  et atteint ses bornes.

On a  $(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}) \in X_s \cap U_n$  et  $f(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}) > 0$  et  $f(X_s \setminus X_s \cap U_n) = \{0\}$ , donc la valeur maximale de  $f$  sur  $X_s$  est strictement positif et atteinte sur  $X_s \cap U_n$ .

On note  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un élément de  $X_s \cap U_n$  en lequel la restriction de  $f$  à  $X_s$  atteint son maximum.

**Q 13.**  $a$  est un maximum de  $f$  dans  $U_n$  sous la contrainte  $g_s(x) = 0$ , le théorème du multiplicateur de Lagrange assure qu'il existe un réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que:  $\mathbf{grad}f(a) = \lambda \mathbf{grad}g(a)$  donc

$$\left( \frac{f(a)}{a_1}, \dots, \frac{f(a)}{a_n} \right) = \lambda (1, \dots, 1)$$

ainsi  $\lambda > 0$  et pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_k = \frac{f(a)}{\lambda}$ .

**Q 14.**

- On a  $a \in X_s \cap U_n$  donc  $g(a) = 0$  ce qui donne pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_k = \frac{s}{n}$ .

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$ , on a  $f(x) \leq f(a)$  donc

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq \prod_{k=1}^n a_k = \left(\frac{s}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{s}{n}$$

or  $x \in X_s$  donc  $s = \sum_{i=1}^n x_i$  d'où  $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

- Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ , si l'un des  $x_i$  est nul l'inégalité est évidente.

Supposons que  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ , posons  $A = \sum_{i=1}^n x_i$  et  $y_i = s \frac{x_i}{A}$  pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , alors  $(y_1, \dots, y_n) \in U_n \cap X_s$  et le cas précédent donne :

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

par suite

$$\left(\prod_{i=1}^n s \frac{x_i}{A}\right)^{1/n} = \frac{s}{A} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s \frac{x_i}{A}$$

d'où  $\boxed{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$

## II. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

**Q 15.** On a  $\mathbf{grad}h_n(x) = (1, \dots, 1)$  et  $\mathbf{grad}F_n(x) = \left(\frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)\right)$  avec

$$\begin{cases} \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) = 1 + \frac{1}{2x_1} (x_1 x_2)^{1/2} + \frac{1}{3x_1} (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \dots + \frac{1}{nx_1} (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{kx_k} (x_1 \dots x_k)^{1/k} + \dots + \frac{1}{nx_k} (x_1 \dots x_n)^{1/n}, \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \frac{1}{nx_n} (x_1 \dots x_n)^{1/n} \end{cases}$$

**Q 16.** On a  $F_n$  est continue et  $\overline{U_n} \cap H_n = X_1 \cap U_n$  qui est compact, d'après Q.12, donc  $F_n$  admet un maximum dans  $\overline{U_n} \cap H_n$ .

On admet que le maximum de  $F_n$  est en fait atteint sur  $U_n \cap H_n$ .

On note  $M_n$  le maximum de  $F_n$  sur  $\overline{U_n} \cap H_n$  et on note  $(a_1, \dots, a_n)$  un point de  $U_n \cap H_n$  en lequel il est atteint. Pour  $k$  entre 1 et  $n$ , on note  $\gamma_k = (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k}$ .

**Q 17.** D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange il existe un réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que:

$\mathbf{grad}F_n(a_1, \dots, a_n) = \lambda \mathbf{grad}h_n(a_1, \dots, a_n)$  , qui se traduit par

$$\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \end{cases}$$

les  $a_i$  sont strictement positifs donc  $\lambda > 0$  , or  $(a_1, \dots, a_n) \in H_n$  donc  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  , ce qui donne le résultat.

**Q 18.**

a) On écrit

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n \\ &= (\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n}) + \dots + \frac{\gamma_n}{n} \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \end{aligned}$$

or  $\gamma_k = (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k}$  pour tout  $k$  donc  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = F_n(a_1, \dots, a_n) = M_n$  .

D'où  $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = M_n$ .

b) On résout, par récurrence, le système suivant:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 & (1) \\ \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 & (2) \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n & (n) \end{cases}$$

L'équation (n) donne  $\gamma_n = \lambda n a_n = \lambda \omega_n a_n$  , supposons pour  $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$  et  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$  que

$\gamma_i = \lambda \omega_i a_i$  avec  $\omega_i = i \left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$  si  $i \neq n$  et  $\omega_n = n$  .

Alors de l'équation (k) on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_k}{k} &= \lambda a_k - \frac{\gamma_{k+1}}{k+1} - \dots - \frac{\gamma_n}{n} \\ &= \lambda a_k - \lambda \frac{\omega_{k+1}}{k+1} a_{k+1} - \dots - \lambda \frac{\omega_{n-1}}{n-1} a_{n-1} - \lambda \frac{\omega_n}{n} a_n \\ &= \lambda a_k + \lambda (a_{k+2} - a_{k+1}) + \dots + \lambda (a_n - a_{n-1}) - \lambda a_n \\ &= \lambda (a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

ainsi  $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$  , d'où le résultat .

**Q 19.** soit  $\varphi : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{cases}$  , on a  $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x}$  ,  $\varphi$  est croissante et  $\varphi(0) = 0$  donc  $\varphi$  est positive sur  $[0, 1]$  .

Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a  $\varphi(\frac{1}{k+1}) \geq 0$  donc  $\ln(\frac{k+2}{k+1}) \leq \frac{1}{k+1}$  qui s'écrit  $(k+1) \ln(\frac{k+2}{k+1}) \geq -1$  on en déduit

$$\boxed{\frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}}$$

**Q 20.** On suppose que  $\lambda > e$ .

- On a  $\gamma_1 = a_1 = \lambda \omega_1 a_1$  donc  $\omega_1 = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e}$ .
- Puisque  $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$  et  $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$  alors

$$\gamma_{k+1}^{k+1} = a_1 \cdots a_{k+1} = \gamma_k^k a_{k+1}$$

par suite

$$(\lambda \omega_{k+1} a_{k+1})^{k+1} = (\lambda \omega_k a_k)^k a_{k+1}$$

qui donne

$$\lambda \omega_{k+1}^{k+1} a_{k+1}^k = \omega_k^k a_k^k$$

or  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\omega_k}{k}$  donc  $\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \omega_k^k \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} (1)$ .

- Montrons par récurrence que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega_k \leq \frac{k}{k+1}$ .

On a  $\omega_1 \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$ , la relation est vraie pour  $k = 1$ . Supposons qu'elle est vraie pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , donc

$$\frac{\omega_k}{k} \leq \frac{1}{k+1} \text{ et } \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k}$$

la relation (1) et l'hypothèse de récurrence donnent

$$\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \omega_k^k \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e}$$

or  $\frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$  donc  $\omega_{k+1} \leq \frac{k+1}{k+2}$ , d'où le résultat.

**Q 21.**

- On a  $\omega_n = n$  et  $\omega_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$  ce qui est absurde, donc forcément  $\lambda \leq e$ .
- La question Q.18 donne  $\lambda = M_n$  qui est la valeur maximale de  $F_n$  sur  $\overline{U}_n \cap H_n$ , donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  tels que  $x_1 + \cdots + x_n = 1$  on a

$$\sum_{k=1}^n (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leq M_n \leq e$$

**Q 22.** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels strictement positifs telle que  $\sum a_n$  converge, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

posons  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  et  $x_k = \frac{a_k}{S_n}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On a  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et  $x_1 + \cdots + x_n = 1$ , le résultat de la question Q.21 s'écrit

$$\sum_{k=1}^n (x_1 \cdots x_k)^{1/k} = \sum_{k=1}^n \frac{(a_1 \cdots a_k)^{1/k}}{S_n} \leq e$$

par suite  $\sum_{k=1}^n (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^n a_k \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ , la série à terme positifs  $\sum_{k \geq 1} (a_1 \cdots a_k)^{1/k}$  est donc convergente, d'où par passage à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Remarque : On montre que la constante  $e$  est la meilleure possible, en effet :

Soit  $n \geq 1$  et  $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ , on a  $(a_1 \cdots a_k)^{1/k} = (k!)^{-1/k}$  la formule de Stirling donne

$(k!)^{1/k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{e}$ , par suite  $\sum_{k=1}^n (k!)^{-1/k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , ceci montre que  $e$  est la meilleure constante possible.

### III Inégalité de Carleman-Yang

#### III. A - Un développement en série entière

Soit  $\varphi$  la fonction définie par

$$\forall t \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}, \quad \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t}$$

On définit aussi la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} b_{n-k} \end{cases}$$

**Q 23.** Pour  $t \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right) \\ &= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2}t + o(t)\right) \end{aligned}$$

donc  $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} e$  et  $\varphi$  est prolongeable par continuité en  $0$ , avec  $\varphi(0) = e$ .

**Q 24.**

- Par récurrence sur  $n$  :

On a  $|b_1| \leq 1$ , supposons  $|b_k| \leq 1$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , alors

$$|b_{n+1}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} |b_{n-k}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq 1$$

d'où le résultat .

- On a  $|b_n| \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$  donc  $Rcv(\sum_{k \geq 0} b_k t^k) \geq Rcv(\sum_{k \geq 0} t^k) = 1$ .

**Q 25.**

- Soit  $t$  dans  $]-1, 1[$  et  $t \neq 0$  on a

$$\varphi'(t) = \left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right)' \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right)$$

donc  $\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$  avec  $\psi(t) = \left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right)'$ , or  $\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1}$  donc

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^n$$

et

$$\begin{aligned}\psi(t) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} t^{n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} t^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} t^n\end{aligned}$$

ce qui donne  $\forall t \in ]-1, 1[$ ,  $\psi(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} t^n$ .

• On a  $\varphi$  est continue sur  $]-1, 1[$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, 1[\setminus \{0\}$  et  $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{-e}{2}$ , le théorème du prolongement de la fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  assure que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, 1[$  et  $\varphi'(0) = \frac{-e}{2}$ , la relation est donc vraie pour  $t = 0$ .

Finalement  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, 1[$  et  $\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$  pour tout  $t \in ]-1, 1[$ .

• On a  $\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$  pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, 1[$  et  $\psi$  est développable en séries entières  $]-1, 1[$  donc elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-1, 1[$ , ce qui donne  $\varphi'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]-1, 1[$ , par récurrence on obtient  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-1, 1[$ .

La formule de Leibnitz donne pour tout  $t \in ]-1, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi^{(n)}(t) = (\varphi(t)\psi(t))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi^{(k)}(t) \varphi^{(n-k-1)}(t)$$

on a  $\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = -\frac{1}{(k+2)}$ , ce qui donne pour  $t = 0$

$$\varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0)$$

**Q 26.**

• La relation précédente s'écrit

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} \frac{\varphi^{(n-k-1)}(0)}{(n-k-1)!} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

avec  $\varphi(0) = e$ . Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_n = e^{-1} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + b_n$ , on a alors

$$u_0 = 0 \text{ et } u_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} u_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Par une récurrence simple on trouve  $\forall n \in \mathbb{N}$   $u_n = 0$ , par conséquence on a  $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -eb_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

• Ceci prouve que la série de Taylor,  $\sum \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k$ , associée à  $\varphi$  converge simplement sur  $]-1, 1[$ , par suite  $\varphi$  est DSE en 0 de rayon de convergence  $R \geq 1$ , donc pour tout  $t \in ]-1, 1[$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k = e \left( 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k \right)$$

### III. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de réels strictement positifs.

**Q 27.** Ecrivons

$$\left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} = \left( \prod_{k=1}^n c_k a_k \right)^{1/n} \left( \prod_{k=1}^n c_k \right)^{-1/n}$$

l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k a_k \left( \prod_{k=1}^n c_k \right)^{-1/n}$$

soit  $N \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\sum_{n=1}^N \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k a_k \left( \prod_{k=1}^n c_k \right)^{-1/n} \right)$$

remarquons que  $(1 \leq n \leq N \text{ et } 1 \leq k \leq n) \Leftrightarrow (1 \leq k \leq N \text{ et } k \leq n \leq N)$  donc

$$\sum_{n=1}^N \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^N \left( c_k a_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} \right)$$

Si la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n}$  converge et la série  $\sum_{k \geq 1} \left( c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} \right)$  converge alors la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left( c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} \right)$$

Le cas de divergence est trivial .

**Q 28.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels strictement positifs telle que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge . Posons  $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$  .

On a

$$\prod_{i=1}^n c_i = \prod_{i=1}^n \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}} = (n+1)^n$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

ainsi

$$c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} = \frac{c_k a_k}{k}$$

de plus  $c_k = k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} ek$  donc  $\frac{c_k a_k}{k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} ea_k$  et la série  $\sum_{n \geq 1} \left( c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} \right)$  converge,

par suite  $\sum_{n \geq 1} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left( c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \prod_{i=1}^n c_i \right)^{-1/n} \right)$$

qui s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n a_n}{n}$$

remarquons que  $c_n = n \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) = en \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right)$ , ce qui donne l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n$$

**Q 29.**

- Par récurrence sur  $n \geq 1$  :

On a  $b_0 = -1$  et  $b_1 = \frac{1}{2}$ , supposons que  $b_k \geq 0$  pour tout  $k$  dans  $[[1, n]]$ .

La relation de définition des  $b_n$  s'écrit

$$n(n+1)b_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1}{k+1} b_{n-k}$$

par suite

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)b_{n+1} &= 1 - \sum_{k=2}^n \frac{n+2}{k+1} b_{n-k+1} - \frac{n+2}{2} b_n \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+2}{k+2} b_{n-k} - \frac{n+2}{2} b_n \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)b_{n+1} - n(n+1)b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{n+1}{k+1} - \frac{n+2}{k+2} \right) b_{n-k} - \frac{n+2}{2} b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{(k+1)(k+2)} b_{n-k} - \frac{n+2}{2} b_n \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence on a  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{(k+1)(k+2)} b_{n-k} \geq 0$  donc

$$(n+1)(n+2)b_{n+1} \geq \left( n(n+1) - \frac{n+2}{2} \right) b_n = \left( n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \right) b_n$$

ce qui donne  $b_{n+1} \geq 0$ . D'où pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $b_n \geq 0$ .

- D'après ce qui précède on a  $1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} < 1 - \frac{1}{2(n+1)}$  donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

ce qui signifie que l'inégalité Carleman-Yang est plus fine que l'inégalité de Carleman.