

## CORRIGE ENS BCPST 2006

### Première partie

Il est assez surprenant que nulle part ne soit précisé le statut un peu particulier du  $dx$ , il n'est jamais dit qu'il est 'infinitésimal' par exemple.....Des solutions évitant le recours à cet artifice seront systématiquement proposées en parallèle des méthodes de l'énoncé.

1°)a) Observons que  $P(U_1 \in dx, U_2 \in dx) = (dx)^2$  est négligeable devant  $P(U_1 \in dx) = dx$ . Donc nous considérerons que si l'événement  $X_k \in dx$  est réalisé, une et une seule des  $n$  variables  $U_i$  est comprise entre  $x$  et  $x+dx$ ,  $k-1$  (parmi les  $n-1$  autres) sont inférieures à  $x$ , les  $n-k$  autres supérieures à  $x$ , d'où la probabilité cherchée

$$P_{n+1}(X_k \in dx) = ndx \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}.$$

*Pour une justification plus précise.*

Si l'événement  $X_k \in ]a, x]$  est réalisé, au plus  $k-1$  variables  $U_i$  sont inférieurs à  $a$ . Soit  $j$  le nombre de  $U_i$  inférieurs à  $a$ , il y alors au moins  $k-j$  variables comprises entre  $a$  et  $x$ . On peut

$$\text{donc écrire } P(X_k \in ]a, x]) = \sum_{j=0}^{k-1} \left( \binom{n}{j} a^j \sum_{i=k-j}^{n-j} \binom{n-j}{i} (x-a)^i (1-x)^{n-i-j} \right).$$

Pour avoir la valeur en  $a$  de la densité de  $X_k$ , on calcule la dérivée de cette expression en  $a$ . Le seul terme qui ne s'annulera pas est celui où  $i=1$  et  $j=k-1$ . On obtient alors une densité valant  $\binom{n}{k-1} a^{k-1} (n-k+1)(1-a)^{n-k}$  dont on vérifie facilement qu'elle coïncide avec le résultat ci-dessus.

b) Ayant affaire à une densité de probabilité, on peut écrire  $\int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx = 1$ . En

$$\text{posant } i=k-1 \text{ et } j=n-k, \text{ on en déduit } \int_0^1 x^i (1-x)^j dx = \frac{1}{(i+j+1) \binom{i+j}{i}} = \frac{i! j!}{(i+j+1)!}.$$

c) 
$$E_{n+1}(X_k) = \int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{n \binom{n-1}{k-1} k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}. \quad \text{On en tire}$$

$$E_{n+1}(X_k - X_{k-1}) = E_{n+1}(X_k) - E_{n+1}(X_{k-1}) = \frac{k}{n+1} - \frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

d) On a p.s.  $Y_1 < Y_2 < Y_3 < \dots < Y_{n+1}$  donc  $E_{n+1}(Y_1) < E_{n+1}(Y_2) < E_{n+1}(Y_3) < \dots < E_{n+1}(Y_{n+1})$ .

Une au plus de ces espérances est donc égale à  $\frac{1}{n+1}$ . Leur somme valant 1, la plus petite est

donc inférieure à  $\frac{1}{n+1}$  et la plus grande supérieure à  $\frac{1}{n+1}$ .

2°) a) i) La somme des  $n+1$  variables aléatoires  $Y_i$  valant 1, la plus petite ne saurait être supérieure à  $\frac{1}{n+1}$ .

a) ii) On a  $Y_1 = \min(U_1, 1-U_1)$ , donc pour  $y \in [0, 1/2]$

$$P_2(Y_1 > y) = P_2(U_1 < 1/2, U_1 > y) + P_2(U_1 > 1/2, 1-U_1 > y) =$$

$$P_2(y < U_1 < 1/2) + P_2(1/2 < U_1 < 1-y) = (1-y) - y = 1-2y. \quad U_1 \text{ suit la loi uniforme sur } [0, 1/2]$$

b) i)  $E(f(U_1, \dots, U_n) 1_{\{U_i < a \forall i\}}) = \int_0^a \dots \left( \int_0^a f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_1$  (pour  $n > 2$ , on sort du cadre du programme qui se limite aux seules intégrales doubles...). En faisant dans chacune des intégrales le changement de variables  $y_i = x_i/a$ , on obtient

$$E(f(U_1, \dots, U_n) 1_{\{U_i < a \forall i\}}) = a^n \int_0^1 \dots \left( \int_0^1 f(ay_1, \dots, ay_n) dy_n \right) \dots dy_1 = a^n E(f(aU_1, \dots, aU_n)).$$

b) ii) Soit  $f$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in [0, a]^{n-1} / x_i - x_{i-1} > y \quad \forall 2 \leq i \leq n-1, x_1 > y, a - x_{n-1} > y\}$ , en convenant que  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} = \{x_1 < \dots < x_{n-1}\}$  et en posant  $a = 1 - y$ .

Le plus petit des segments pouvant être l'un des  $n+1$  segments, la variable  $X_n$  pouvant coïncider avec l'une des  $n$  variables  $U_i$ , on a  $P_{n+1}(Y_1 \in dy) =$

$$(n+1)n P_{n+1}(1-U_n \in dy, U_1 < a, \dots, U_{n-1} < a, X_1 > y, X_2 - X_1 > y, \dots, X_{n-1} - X_{n-2} > y, a - X_{n-1} > y)$$

$$= (n+1)ndy E_n(f(U_1, \dots, U_{n-1}) 1_{\{U_i < a \forall i\}}) = (n+1)ndya^{n-1} E_n(f(aU_1, \dots, aU_{n-1})).$$

Or  $f(au_1 \dots au_{n-1}) = 1$  si  $0 \leq au_i \leq a$ ,  $v_i - v_{i-1} > y$ ,  $v_1 > y$ ,  $a - v_{n-1} > y$  si l'on convient  $\{au_1, \dots, au_{n-1}\} = \{v_1 < \dots < v_{n-1}\}$ .

Donc si l'on pose  $w_i = v_i/a$ , on a  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} = \{w_1 < \dots < w_{n-1}\}$ , et  $f(au_1 \dots au_{n-1}) = 1$  si  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $w_i - w_{i-1} > y/a$ ,  $w_1 > y/a$ ,  $1 - w_{n-1} > y/a$ . Finalement  $E_n(f(aU_1, \dots, aU_{n-1})) = P_n(X_i - X_{i-1} > y/a, X_1 > y/a, 1 - X_{n-1} > y/a) = P_n(Y_1 > y/(1-y))$  et le résultat demandé en découle.

$$c) P_{n+1}(Y_1 > y) = \int_y^{1/(n+1)} P_{n+1}(Y_1 \in dt) dt = \int_y^{1/(n+1)} n(n+1)(1-t)^{n-1} \left(1 - n \frac{t}{1-t}\right)^{n-1} dt =$$

$$P_{n+1}(Y_1 > y) = \int_y^{1/(n+1)} n(n+1)(1-t-nt)^{n-1} dt = \left[ -(1-(n+1)t)^n \right]_y^{1/(n+1)} = (1-(n+1)y)^n.$$

$$d) \text{ On a } E_{n+1}(Y_1) = \int_0^{1/(n+1)} P_{n+1}(Y_1 > t) dt = \int_0^{1/(n+1)} (1-(n+1)t)^n dt = \left[ -\frac{(1-(n+1)t)^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^{1/(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

*Une méthode plus directe.*

$$P_{n+1}(Y_1 > t) = n! P_{n+1}(U_1 < U_2 < \dots < U_n, U_1 > t, U_2 - U_1 > t, \dots, 1 - U_n > t) = n! \iiint_A du_1 \dots du_n$$

où  $A = \{(u_1, \dots, u_n) / 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1, u_1 > t, u_2 - u_1 > t, \dots, 1 - u_n > t\}$ . Remarquons que l'on a  $t < u_1 < u_2 - t$  donc  $u_2 > 2t$ ,  $2t < u_2 < u_3 - t$  donc  $u_3 > 3t$  etc....  $it < u_i < u_{i+1} - t$ . Donc la première intégration par rapport à  $u_1$  donne  $u_2 - 2t$ , la deuxième  $\int_{2t}^{u_3-t} (u_2 - 2t) du_2 = (u_3 - 3t)^2 / 2$ , la troisième  $\int_{3t}^{u_4-t} (u_3 - 3t)^2 / 2 du_3 = (u_4 - 4t)^4 / 4! \dots$  et la dernière  $\int_{nt}^{1-t} (u_n - nt)^{n-1} / (n-1)! du_n = (1-t-nt)^n / n!$  et notre formule est établie.

$$3^\circ) a) i) P(U \leq x / U > a) = \frac{P(X > a, X \leq x)}{P(X > a)} = 0 \text{ si } x < a, \quad 1 \text{ si } x > 1, \quad \frac{x-a}{1-a} \text{ sinon.}$$

$P(a + (1-a)U \leq y) = P\left(U \leq \frac{y-a}{1-a}\right) = 0 \text{ si } y < a, \quad 1 \text{ si } y > 1, \quad \frac{y-a}{1-a} \text{ sinon.}$  Les deux lois coïncident bien.

a) ii) Si  $Y_1 = y$ , tous les segments ont une longueur d'au moins  $y$ , donc  $Y_2 = 1 - (Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{n+1}) \leq 1 - ny$  et en posant  $Z_i = \frac{Y_i - y}{1 - (n+1)y}$ , on obtient des variables

comprises entre 0 et 1, telles que  $Z_2 + Z_2 \dots + Z_{n+1} = 1$ , réalisant un partage de l'intervalle  $[0,1]$  en  $n$  segments similaire à celui réalisé par les  $n+1$  variables  $Y_i$ . Comme  $Y_i = y + (1 - (n+1)y)Z_i$ , on obtient bien la loi annoncée.

b) On a donc  $E_{n+1}(Y_{k+1} / Y_1 = y) = E_n(y + (1 - (n+1)y)Y_k) = y + (1 - (n+1)y)E_n(Y_k)$ , d'où

$$E_{n+1}(Y_{k+1}) = \int_0^{1/(n+1)} E_{n+1}(Y_{k+1} / Y_1 = y) P(Y_1 \in dy) dy$$

(notons au passage que l'espérance conditionnelle ne figure pas au programme BCPST)

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/(n+1)} (y + (1 - (n+1)y)E_n(Y_k)) n(n+1)(1 - (n+1)y)^{n-1} dy \\ &= \int_0^{1/(n+1)} n(n+1)y(1 - (n+1)y)^{n-1} dy + E_n(Y_k) \int_0^{1/(n+1)} n(n+1)(1 - (n+1)y)^n dy \\ &= E_{n+1}(Y_1) + E_n(Y_k) \left[ -\frac{n(1 - (n+1)y)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1/(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{n+1} E_n(Y_k). \end{aligned}$$

c) On a donc  $\alpha_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \alpha_k^{(n)}$ , d'où

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+2} + \alpha_1^{(n-k+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+2} + \frac{1}{n-k+1},$$

vu que  $\alpha_1^{(i)} = iE_i(Y_1) = \frac{i}{i^2} = \frac{1}{i}$ , donc  $\alpha_{k+1}^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-k}$  comme annoncé.

### Une autre méthode.

Commençons par calculer une intégrale un peu plus générale que celle qui nous a permis de résoudre plus rapidement la question 2°).

Soit  $\iiint_{A_I} du_1 \dots du_n$  où

$$A_I = \{(u_1 \dots u_n) / 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1, \quad u_i - u_{i-1} > t \quad \forall i \in I\}$$

$I \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_{n+1} = 1$ . Lorsque l'on aborde la  $i^{\text{ème}}$  intégration, par rapport à la variable  $u_i$ , la borne supérieure sera soit  $u_{i+1} - t$  si  $i \in I$ , soit  $u_{i+1}$  sinon, la borne inférieure sera  $kt$ ,  $k$  désignant le nombre d'éléments de  $I$  inférieurs à  $i$  et la fonction à intégrer  $\frac{(u_i - kt)^{i-1}}{(i-1)!}$ . On obtient ainsi comme valeur de l'intégrale  $\frac{((1 - Kt)^+)^n}{n!}$ ,  $K$  le cardinal de  $I$  (on

note  $x^+$  la partie positive du réel  $x$ ).

Nous allons maintenant calculer  $P_{n+1}(Y_{k+1} > t) - P_{n+1}(Y_k > t) = P_{n+1}(Y_{k+1} > t > Y_k)$

$$= n! \binom{n+1}{k} \iiint_B du_1 \dots du_n \text{ où}$$

$$B = \{(u_1, \dots, u_n) / 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1, u_i - u_{i-1} < t \quad \forall i \leq k \quad u_i - u_{i-1} > t \quad \forall i > k\}$$

$$= n! \binom{n+1}{k} \iiint_{A_I} du_1 \dots du_n - n! \binom{n+1}{k} \iiint_C du_1 \dots du_n \text{ avec } I = \{k+1, \dots, n+1\} \text{ et } C = \bigcup_{i=1}^k A_{I_i}, \quad I_i = \{k+1, \dots, n+1\} \cup \{i\}$$

qui vaut aussi, en utilisant la formule du crible,

$$= n! \binom{n+1}{k} \frac{((1 - (n+1-k)t)^+)^{n+1}}{n!} - n! \binom{n+1}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \iiint_{C_j} du_1 \dots du_n \text{ où } C_j = \{1, \dots, j\} \cup \{k+1, \dots, n+1\}$$

$$= \binom{n+1}{k} ((1 - (n+1-k)t)^+)^{n+1} - n! \binom{n+1}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{((1 - (n-k+1+j)t)^+)^{n+1}}{n!}$$

$$= \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} ((1 - (n-k+1+j)t)^+)^{n+1} = \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} ((1 - (n-i+1)t)^+)^{n+1} .$$

En intégrant cette relation entre 0 et 1, on obtient

$$E_{n+1}(Y_{k+1}) - E_{n+1}(Y_k) = \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{1}{(n+1)(n-i+1)} = \binom{n+1}{k} \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{t^{n-i}}{(n+1)} \right) dt$$

$$= \binom{n+1}{k} \int_0^1 \left( t^{n-k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{t^{k-i}}{(n+1)} \right) dt = \binom{n+1}{k} \int_0^1 \left( \frac{t^{n-k} (1-t)^k}{n+1} \right) dt = \binom{n+1}{k} \frac{(n-k)! k!}{(n+1)(n+1)!}$$

soit le résultat attendu,  $\frac{1}{(n+1)(n-k+1)}$ .

## **Deuxième partie.**

$$1^\circ) a) q_{n+1,1} = P(K_{n+1} = 1) = P(K_{n+1} = 1, K_n = 1, \dots, K_2 = 1, K_1 = 1) =$$

$$P(K_{n+1} = 1 / K_n = 1, \dots, K_2 = 1, K_1 = 1) P(K_n = 1 / K_{n-1} = 1, \dots, K_2 = 1, K_1 = 1) \dots P(K_2 = 1 / K_1 = 1) P(K_1 = 1)$$

$$= \left( \frac{n}{n+\theta} \right) \left( \frac{n-1}{n-1+\theta} \right) \dots \frac{1}{1+\theta}, \text{ cqfd.}$$

b) Si les n+1 premiers convives occupent i tables, soit les n premiers convives en occupant déjà i et le convive suivant a choisi de rejoindre l'un de ses congénères, soit les n premiers

convives n'en occupaient que i-1 et le convive suivant a choisi de faire bande à part, d'où la relation suivante :  $q_{n+1,i} = \frac{n}{n+\theta} q_{n,i} + \frac{\theta}{n+\theta} q_{n,i-1}$ , valable même si i=1 et i=n+1.

2°)a) En multipliant par  $X^i$  les deux membres de cette relation et en sommant entre 1 et n+1,

$$\text{on obtient } P_{n+1}(X) = \frac{n}{n+\theta} \sum_{i=1}^{n+1} q_{n,i} X^i + \frac{\theta}{n+\theta} \sum_{i=1}^{n+1} q_{n,i-1} X^i = \frac{n}{n+\theta} \sum_{i=1}^{n+1} q_{n,i} X^i + \frac{\theta X}{n+\theta} \sum_{i=1}^{n+1} q_{n,i-1} X^{i-1}$$

$$\text{et donc, vu que } q_{n,0} = q_{n,n+1} = 0, P_{n+1}(X) = \frac{n}{n+\theta} P_n(X) + \frac{\theta X}{n+\theta} P_n(X) = \frac{n+\theta X}{n+\theta} P_n(X).$$

$$\text{b) } P_1(X) = X, P_2(X) = \frac{1+\theta X}{1+\theta} P_1(X) = \frac{1+\theta X}{1+\theta} \frac{\theta X}{\theta} = \frac{L_2(\theta X)}{L_2(\theta)}, \text{ etc...et par une récurrence}$$

$$\text{immédiate } P_n(X) = \frac{L_n(\theta X)}{L_n(\theta)}.$$

$$3^\circ)\text{a) } P'_n(X) = \sum_{i=1}^n i q_{n,i} X^{i-1}, \text{ d'où } P'_n(1) = \sum_{i=1}^n i q_{n,i} = E(K_n).$$

$$\text{Or si } x > 0, \ln(P_n(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(i+\theta x) - \ln(P_n(\theta)), \text{ d'où en dérivant } \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{i+\theta x} \text{ et vu}$$

$$\text{que } P_n(1) = 1, E(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta+i}.$$

$$\text{b) } P''_n(X) = \sum_{i=1}^n i(i-1) q_{n,i} X^{i-2}, P''_n(1) = \sum_{i=1}^n i(i-1) q_{n,i} = E(K_n(K_n-1)) = E(K_n^2) - E(K_n)$$

$$\text{et } \text{Var}(K_n) = E(K_n^2) - (E(K_n))^2 = P''_n(1) + E(K_n) - (E(K_n))^2 = P''_n(1) + P'_n(1) - (P'_n(1))^2.$$

$$\text{En dérivant la relation du a) on obtient } P''_n(1) - (P'_n(1))^2 = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(i+\theta)^2} \text{ et}$$

$$\text{Var}(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{(i+\theta)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(i+\theta)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i\theta}{(i+\theta)^2}.$$

4°)a) Il suffit de poser  $\varepsilon_i = 1$  si le i<sup>ème</sup> convive fait bande à part, et  $\varepsilon_i = 0$  sinon.

$$P(\varepsilon_i = 1) = \frac{\theta}{i-1+\theta}.$$

b) Donc  $E(K_n) = \sum_{i=1}^n E(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{i-1+\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{i+\theta}$  et par indépendance

$$\text{Var}(K_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\theta+i-1} \left(1 - \frac{\theta}{\theta+i-1}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)\theta}{(i-1+\theta)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i\theta}{(i+\theta)^2}.$$

5°)a) Vu que  $\forall x \in [i-1, i] \quad \frac{\theta}{\theta+x} \geq \frac{\theta}{\theta+i}$  et que  $\forall x \in [i, i+1] \quad \frac{\theta}{\theta+x} \leq \frac{\theta}{\theta+i}$ , on obtient en

intégrant  $\int_i^{i+1} \frac{\theta}{\theta+x} dx \leq \frac{\theta}{i+\theta} \leq \int_{i-1}^i \frac{\theta}{\theta+x} dx$ . Puis en sommant sur  $i$  de 1 à  $n-1$  on obtient

$\int_1^n \frac{\theta}{\theta+x} dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta}{i+\theta} \leq \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta+x} dx$ . Ce qui, en rajoutant le premier terme donne

$1 + \int_1^n \frac{\theta}{\theta+x} dx \leq E(K_n) \leq 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta+x} dx$ . (La formule demandée est évidemment

incorrecte, le premier terme étant supérieur au dernier...)

b) On a donc  $1 + \theta \ln(\theta+n) - \theta \ln(1+\theta) \leq E(K_n) \leq 1 + \theta \ln(\theta+n-1) - \theta \ln(\theta)$  et en divisant

par  $\theta \ln(n)$ ,  $\frac{1/\theta - \ln(1+\theta)}{\ln(n)} + 1 + \frac{\ln(1+\theta/n)}{\ln(n)} \leq \frac{E(K_n)}{\theta \ln(n)} \leq \frac{1/\theta - \ln(\theta)}{\ln(n)} + 1 + \frac{\ln(1+(\theta-1)/n)}{\ln(n)}$ ,

donc  $\frac{E(K_n)}{\theta \ln(n)} \rightarrow 1$  et  $E(K_n) \sim \theta \ln(n)$ .

6°)  $\text{Var}(K_n) - E(K_n) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(\theta+i)^2}$ . En raisonnant comme ci-dessus on peut affirmer que

$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(\theta+i)^2} \leq 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta^2}{(\theta+x)^2} dx = 1 + \theta - \frac{\theta^2}{(\theta+n-1)} \leq 1 + \theta$ , et donc  $\text{Var}(K_n) - E(K_n)$  est

borné et par conséquent négligeable devant  $E(K_n)$  qui tend vers l'infini. On a donc

$\text{Var}(K_n) \sim E(K_n) \sim \theta \ln(n)$ .

### Troisième partie.

A) La fonction  $\Gamma$ .

1°) Vu que  $t^{x+1} \exp(-t) \xrightarrow{+\infty} 0$ , il existe un réel  $A > 0$  tel que  $\forall t > A$   $t^{x+1} \exp(-t) < 0,13$  et  $t^{x-1} \exp(-t) < 0,13/t^2$ . Or  $\int_A^{+\infty} \frac{0,13}{t^2} dt$  converge, donc  $\int_A^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$  aussi. Si  $0 < x < A$ ,  $0 < t^{x-1} \exp(-t) < t^{x-1}$ , or  $\int_0^A t^{x-1} dt$  converge, donc  $\int_0^A t^{x-1} \exp(-t) dt$  aussi. Finalement  $\Gamma(x)$  est donc bien définie.

2°)a)  $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt = \left[ -t^x \exp(-t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} \exp(-t) dt = 0 - 0 + x \Gamma(x)$ , en intégrant par parties.

b)  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1$ ,  $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$ ,  $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 2.3, \dots$   
 $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

c) En admettant que  $\Gamma$  est continue en 1, ce qui sans indications pour un étudiant de BCPST est hors de portée (car hors programme.....), on a  $x \Gamma(x) \xrightarrow{0} \Gamma(1) = 1$ , donc  $\Gamma(x) \sim 1/x$ .

3°) L'espérance vaut  $\int_0^{+\infty} t \frac{t^{\theta-1} \exp(-t)}{\Gamma(\theta)} dt = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)} = \theta$  et la variance  $\int_0^{+\infty} t^2 \frac{t^{\theta-1} \exp(-t)}{\Gamma(\theta)} dt - \theta^2 = \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta)} - \theta^2 = \theta(\theta+1) - \theta^2 = \theta$ .

B) Etude de la série logarithmique.

4°) La série est absolument convergente vu que  $0 \leq \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n$  et que la série de terme général  $|x^n|$  est convergente.

5°) La formule se montre facilement par récurrence :

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{(n-1)!}{x^n} \right) = \frac{d}{dx} \left( -(n-1)! x^{-n} \right) = -(n-1)! (-1)(-n) x^{-n-1} = -\frac{n!}{x^{n+1}} .$$

6°) C'est une conséquence immédiate de la formule de Taylor avec reste intégral, hors programme....Une récurrence avec intégration par parties donne néanmoins le résultat :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{n+1}} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}(n+1)}{(n+1)(1-t)^{n+2}} dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt.$$

7°) La fonction  $t \rightarrow \frac{x-t}{1-t}$  décroît sur  $] -\infty, 1[$ .

Si  $0 \leq x < 1$ . On peut écrire  $0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq \left( \frac{x-t}{1-t} \right) \leq x$  et  $0 \leq \left( \frac{x-t}{1-t} \right)^n \leq x^n$ . Donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{(1-t)} dt = -x^n \ln(1-x), \quad \text{donc} \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Si  $-1 < x \leq 0$ . On peut écrire  $x \leq t \leq 0 \Rightarrow x \leq \left( \frac{x-t}{1-t} \right) \leq 0$  et  $0 \leq \left| \left( \frac{x-t}{1-t} \right)^n \right| \leq |x|^n$ . Donc

$$0 \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|x|^n}{(1-t)} dt = |x|^n \ln(1-x), \quad \text{donc} \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

C) Abondance d'une espèce.

8°)a) Une loi binomiale de paramètres (N,p).

b) Une loi de Poisson de paramètre d (résultat au programme, lui...).

$$\begin{aligned} 9°)a) P(X = k, G \in dy) &= P(X = k | G \in dy)P(G \in dy) = \frac{\exp(-\rho y)(\rho y)^k}{k!} \cdot \frac{y^{\theta-1} \exp(-y) dy}{\Gamma(\theta)} \\ &= \frac{\rho^k y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{k! \Gamma(\theta)}. \quad (\text{Sachant } G \in dy, X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \rho y.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X = k) &= \int_0^{+\infty} P(X = k, G \in dy) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^k y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{k! \Gamma(\theta)} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho^k (u/(1+\rho))^{k+\theta-1} \exp(-u) du}{k! \Gamma(\theta) (1+\rho)^{k+\theta}} = \frac{\rho^k}{k! \Gamma(\theta) (1+\rho)^{k+\theta}} \int_0^{+\infty} u^{k+\theta-1} \exp(-u) du = \frac{\rho^k \Gamma(k+\theta)}{k! \Gamma(\theta) (1+\rho)^{k+\theta}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^\circ \text{a) } P(G \in dy / X = k) &= \frac{P(G \in dy, X = k)}{P(X = k)} = \frac{\frac{\rho^k y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{k! \Gamma(\theta)}}{\frac{\rho^k \Gamma(k+\theta)}{k! \Gamma(\theta) (1+\rho)^{k+\theta}}} = \\ &= \frac{(1+\rho)^{\theta+k} y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{\Gamma(k+\theta)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P((1+\rho)D/\rho \in dy / X = k) &= P(G \in d(y/(1+\rho)) / X = k) = \\ &= \frac{(1+\rho)^{\theta+k} (y/(1+\rho))^{k+\theta-1} \exp(-y) d(y/(1+\rho))}{\Gamma(k+\theta)} = \frac{y^{k+\theta-1} \exp(-y) dy}{\Gamma(k+\theta)}, \text{ soit une loi gamma de} \\ &\text{paramètre } k+\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{Donc } E\left(\frac{1+\rho}{\rho} D / X = k\right) &= k+\theta \quad \text{et par linéarité de l'espérance} \\ E(D / X = k) &= \frac{\rho}{1+\rho} (k+\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11^\circ \text{a) } P(X = k, G \in dy / X \geq 1) &= \frac{P(X = k, G \in dy)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{\rho^k y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{k! \Gamma(\theta)}}{1 - (1+\rho)^{-\theta}} = \\ &= \frac{\rho^k y^{k+\theta-1} \exp(-y(1+\rho)) dy}{k! \Gamma(\theta) (1 - (1+\rho)^{-\theta})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{Quand } \theta \rightarrow 0^+, y^{k+\theta-1} &\rightarrow y^{k-1}, \\ 1 - (1+\rho)^{-\theta} &= 1 - \exp(-\theta \ln(1+\rho)) \sim -(-\theta \ln(1+\rho)) = \theta \ln(1+\rho) \quad \text{et donc} \\ \Gamma(\theta) (1 - (1+\rho)^{-\theta}) &\sim \Gamma(\theta) \theta \ln(1+\rho) \sim \ln(1+\rho). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(X = k, G \in dy / X \geq 1) \rightarrow \frac{\rho^k y^{k-1} \exp(-y(1+\rho))}{k! \ln(1+\rho)} dy.$$

$$c) P^*(X = k) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^k y^{k-1} \exp(-y(1+\rho))}{k! \ln(1+\rho)} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^k (u/(1+\rho))^{k-1} \exp(-u)}{k! \ln(1+\rho)} d(u/(1+\rho)) =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho^k u^{k-1} \exp(-u)}{(1+\rho)^k k! \ln(1+\rho)} du = \frac{\rho^k \Gamma(k)}{(1+\rho)^k k! \ln(1+\rho)} = \left( \frac{\rho}{1+\rho} \right)^k \frac{1}{k \ln(1+\rho)} = c \frac{x^k}{k} \quad \text{avec}$$

$$x = \frac{\rho}{1+\rho} \in ]0,1[, \quad c = \frac{1}{\ln(1+\rho)}.$$

Et

$$P^*(G \in dy) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k y^{k-1} \exp(-y(1+\rho))}{k! \ln(1+\rho)} dy = \frac{\exp(-y(1+\rho))}{y \ln(1+\rho)} dy \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\rho y)^k}{k!} = \frac{\exp(-y(1+\rho))}{y \ln(1+\rho)} (\exp(\rho y) - 1) dy$$

$$= c \exp(-y) \frac{(1 - \exp(-\rho y))}{y} dy.$$

d)

$$E^*(D) = E^*(\rho G) = \rho \int_0^{+\infty} y c \exp(-y) \frac{(1 - \exp(-\rho y))}{y} dy = c \rho \left[ -\exp(-y) + \frac{\exp(-y(1+\rho))}{1+\rho} \right]_0^{+\infty} = c \frac{\rho^2}{1+\rho}$$

$$E^*(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c \frac{x^k}{k} = c \frac{x}{1-x} = c \rho.$$

$$E^*(DX) = \rho E^*(DG) = \rho \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k y \frac{c \rho^k y^{k-1} \exp(-y(1+\rho))}{k!} dy = \int_0^{+\infty} c \rho^2 y \exp(-y(1+\rho)) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\rho y)^{k-1}}{(k-1)!} dy =$$

$$\int_0^{+\infty} c \rho^2 y \exp(-y(1+\rho)) \exp(\rho y) dy = c \rho^2 \int_0^{+\infty} y \exp(-y) dy = c \rho^2 \Gamma(2) = c \rho^2.$$

$$\text{Cov}(D, X) = c \rho^2 - c^2 \frac{\rho^3}{1+\rho} = c^2 \rho^2 \frac{(1+\rho) \ln(1+\rho) - \rho}{1+\rho}.$$

Etudions le numérateur :  $\frac{d}{d\rho} ((1+\rho) \ln(1+\rho) - \rho) = \ln(1+\rho) > 0$ , la fonction s'annule en 0,

et est donc toujours positive, ainsi que la covariance calculée, ce qui est tout à fait raisonnable car si la densité augmente le nombre d'individus observés a tendance lui aussi à augmenter.

$$12^\circ) a) M = S \cdot P^*(X = 1) = S c x = \frac{S \rho}{(1+\rho) \ln(1+\rho)} \quad \text{et} \quad N = S \cdot E^*(X) = S c \rho = \frac{S \rho}{\ln(1+\rho)}.$$

$$\text{Donc } \rho = \frac{N}{M} - 1.$$

$$b) \frac{S}{N} = \frac{\ln(1+\rho)}{\rho}, \text{ or } x = \frac{\rho}{1+\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{x}{1-x}, \text{ donc } \frac{S}{N} = \frac{\ln(1+\rho)}{\rho} = \frac{(x-1) \ln(1-x)}{x} = \varphi(x).$$

$\varphi'(x) = \frac{(\ln(1-x)+1)x - (x-1)\ln(1-x)}{x^2} = \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} < 0$ . Le rapport décroît donc, et a en 0 (resp. 1) pour limite 1 (resp. 0).