

Corrigé

Partie A

1)

Une CNS pour que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible est que $\det A \neq 0$. Dans ce cas $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

2)

On sait que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A)$$

où $\text{Com } A$ désigne la matrice des cofacteurs de A .

Dans le cas général, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, si $\det A = ad - bc \neq 0$, on a donc : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On applique cette formule aux trois cas proposés. On trouve :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

3)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. A est inversible si et seulement si $\det A = ad - bc \neq 0$; Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Pour que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il faut que son déterminant $\frac{1}{ad - bc}$ soit un entier relatif, donc nécessairement $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifie $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$, alors, A est inversible et son inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$,

Donc, pour que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ admette une matrice inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il faut et il suffit que $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$.

4)

On note $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$, le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut 1. Les matrices de cet ensemble sont donc inversibles et leur inverse est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$. $A_4 \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A_4 = 5 - bc = 1 \iff bc = 4$. Comme $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$, on obtient les couples (b, c) suivants :

$$(4, 1), (-4, -1), (1, 4), (-1, -4), (2, 2), (-2, -2)$$

Partie B

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel $p \neq 0$, vérifiant $A^p = I_2$. Pour chaque matrice $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel $q \neq 0$, tel que $A^q = I_2$. On le note $h(A)$; il est appelé l'ordre de la matrice A .

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1)

Comme $A^p = I_2$, alors $(\det A)^p = \det I_2 = 1$.

Ce qui implique que $\det A \in \{-1, 1\}$. D'après la question A-3, A est inversible et son inverse est élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2)

Alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I_2$. Ainsi, $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A^{-1}) \leq p = h(A)$. En intervertissant les rôles de A et de son inverse, on a aussi $h(A) \leq h(A^{-1})$.

On a utilisé le fait que l'ordre d'une matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ est le plus petit entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.

Ainsi $h(A^{-1}) = p = h(A)$

3)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Il existe donc $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, tel que $AU = \lambda U$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. D'où $A^p U = \lambda^p U$.

Comme $A^p = I_2$, alors $\lambda^p U = U$, et puisque $U \neq 0$, $\lambda^p = 1$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{C}$ de A sont de module 1.

4)

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \det(X I_2 - A) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det A$. Ses racines sont les valeurs propres de A . Donc $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

5)

Donc $|\text{Tr}(A)| = |a + d| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = 2$. Comme $(a, d) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$, et on vérifie que $\text{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6)

Les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, car leurs coefficients sont éléments de $\mathbb{Z}$ et

$C^2 = D^2 = I_2$.

Leur ordre est égal à 2, puisque $C^1 \neq I_2$ et $D \neq I_2$.

$M = CD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$. Sa trace vaut -2, son déterminant -1. Son polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = X^2 - \text{Tr} X + \det M = X^2 + 2X - 1$ admet $-1 \pm \sqrt{2}$ pour racines. Ces nombres sont les valeurs propres de $M = CD$. Elles ne sont pas de module 1.

D'après la question B-3, CD n'est pas élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

7)

$\chi_A(X) = \det(X I_2 - A) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det A$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 peuvent être réelles, de valeur absolue égale à 1, auquel cas leur produit $\det A = \pm 1$.

Elles peuvent être non réelles mais alors complexes conjuguées, car racines d'un polynôme à coefficients réels, auquel cas $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, et leur produit est $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 = 1$, d'après B-3.

Dans tous les cas $\det A = \pm 1$. Le déterminant de A a deux valeurs possibles ± 1 . D'après B-5, la trace de A a elle cinq valeurs possibles, dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Ainsi, le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X I_2 - A) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det A$ a dix valeurs possibles.

D'après B-3, il faudra exclure les polynômes dont les racines ne sont pas de module 1.

8)

a. $\det A = 1$.

- Cas 1 : $\text{Tr} A = -2$. $\chi_A(X) = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ a une racine double égale à -1, de valeur absolue 1.
- Cas 2 : $\text{Tr} A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 + X + 1$ a deux racines conjuguées j et j^2 de module 1.
- Cas 3 : $\text{Tr} A = 0$. $\chi_A(X) = X^2 + 1$ a deux racines conjuguées i et $-i$ de module 1.
- Cas 4 : $\text{Tr} A = 1$. $\chi_A(X) = X^2 - X + 1$ a deux racines conjuguées $-j$ et $-j^2$ de module 1.
- Cas 5 : $\text{Tr} A = 2$. $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ a une racine double égale à 1, de valeur absolue 1.

b. $\boxed{\det A = -1}$.

- Cas 6 : $\text{Tr } A = -2$. $\chi_A(X) = X^2 + 2X - 1$ a deux racines réelles $-1 \pm \sqrt{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 7 : $\text{Tr } A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 + X - 1$ a deux racines réelles $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 8 : $\text{Tr } A = 0$. $\chi_A(X) = X^2 - 1$ a deux racines réelles ± 1 , de valeur absolue 1.
- Cas 9 : $\text{Tr } A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 - X - 1$ a deux racines réelles $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 10 : $\text{Tr } A = 2$. $\chi_A(X) = X^2 - 2X - 1$ a deux racines réelles $1 \pm \sqrt{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.

$\boxed{9)}$

Seuls six cas sont donc à retenir. Les cas 6, 7, 9 et 10 sont à exclure.

Rappelons que si le polynôme caractéristique de A est scindé simple, dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, i.e a deux racines distinctes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Ainsi, dans les cas 2, 3, 4, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$; dans le cas 8, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Restent les cas 1 et 5, où le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, mais avec une racine double $\varepsilon = \pm 1$. A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et semblable à une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $A^p = I_2$. Il est facile de vérifier par récurrence que :

$$T^p = \begin{pmatrix} \varepsilon^p & p\alpha \\ 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \alpha = 0$$

Ce qui prouve qu'en fait, dans les cas 1 et 5, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Dans les six cas retenus, A est donc diagonalisable dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et donc semblable à la matrice diagonale T de ses valeurs propres. Comme $A^p = I_2$, on a bien sûr $T^p = I_2$.

- a. Cas 1 : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_2$. $T^2 = I_2$. L'ordre de A vaut donc 2.
- b. Cas 2 : $T = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^2 \neq I_2$ et $T^3 = I_2$. L'ordre de A vaut donc 3.
On a utilisé la propriété $j^3 = 1$.
- c. Cas 3 : $T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^3 \neq I_2$ et $T^4 = I_2$. L'ordre de A vaut donc 4.
- d. Cas 4 : $T = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^2 \neq I_2$ et $T^3 = I_2$. L'ordre de A vaut donc 3.
- e. Cas 5 : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. L'ordre de A vaut donc 1.
- f. Cas 8 : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_2$. $T^2 = I_2$. L'ordre de A vaut donc 2.

$\boxed{10)}$

$P_2 = 12$ est le plus petit commun multiple des divers ordres trouvés.

Il vérifie bien la propriété demandée :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}), A^{p_2=12} = I_2}$$

Partie C

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

On considère l'application φ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

$\boxed{1)}$

La linéarité de l'intégrale montre que φ est une forme linéaire par rapport au premier argument, i.e :

$$\forall (P, Q, R) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$$

La forme est évidemment symétrique, i.e $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.

La forme est positive : $\forall P \in E, \varphi(P, P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt \geq 0$, car P^2 est cpm et positive sur $[-1, 1]$.

Soit $P \in E$, tel que $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$. Comme P^2 est positif et continu sur $[-1, 1]$, alors le polynôme P^2 s'annule en tout point de $[-1, 1]$, et ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul, de même que P .

On a montré que $\forall P \in E, \varphi(P, P) = 0 \implies P = 0$, ce qui prouve que la forme φ est définie.

φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie sur E : c'est un produit scalaire sur E .

La norme euclidienne associée est définie par :

$$\forall P \in E, \|P\|^2 = \varphi(P, P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt$$

2)

Il s'agit bien sûr du procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Posons, quel que soit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $F_i = \text{Vect}((X_j)_{0 \leq j \leq i})$.

On notera p_i le projecteur orthogonal sur F_i .

On va démontrer par récurrence sur i la propriété $\mathcal{P}_i$: il existe une base orthonormale unique $\pi_0, \dots, \pi_i$ de F_i telle que, quel que soit $j \in [0, i]$, $\varphi(X^j, \pi_j) \geq 0$.

Initialisation : pour $i = 0$, $\pi_0 = \alpha_0 X^0$. $\begin{cases} \|\pi_0\|^2 = \alpha_0^2 \|X^0\|^2 = 2\alpha_0^2 \\ \varphi(\pi_0, X^0) = \alpha_0 \varphi(X^0, X^0) = 2\alpha_0 \end{cases} \begin{matrix} = 1 \\ \geq 0 \end{matrix} \implies \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} X^0$

Hérédité : supposons la propriété vérifiée pour $i - 1 \in \{0, 1, 2\}$.

Alors, nécessairement $X^i = \alpha_i \pi_i + Y_i$, $\alpha_i \neq 0$, $Y_i \in F_{i-1}$.

Comme $\pi_i \in F_{i-1}^\perp$, nécessairement $Y_i = p_{i-1}(X^i) = \sum_{j=0}^{i-1} \varphi(X^i, \pi_j) \pi_j$.

De plus $\|X^i\|^2 = \alpha_i^2 \|\pi_i\|^2 + \|Y_i\|^2 = \alpha_i^2 + \sum_{j=0}^{i-1} \varphi(X^i, \pi_j)^2$.

D'autre part $\underbrace{\varphi(X^i, \pi_i)}_{\geq 0} = \alpha_i \varphi(X^i, X^i) + \underbrace{\varphi(Y_i, \pi_i)}_{=0} = \alpha_i \underbrace{\|X^i\|^2}_{>0} \implies \alpha_i \geq 0$.

D'où $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\|X^i\|^2 - \sum_{j=0}^{i-1} \varphi(X^i, \pi_j)^2}}$ et $\pi_i = \frac{1}{\sqrt{\|X^i\|^2 - \sum_{j=0}^{i-1} \varphi(X^i, \pi_j)^2}} \left(X^i - \sum_{j=0}^{i-1} \varphi(X^i, \pi_j) \pi_j \right)$.

Ces formules montrent l'existence-unicité demandée et donnent le procédé de construction de la base orthonormale.

On trouve successivement :

$$\pi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} X^0, \pi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} X, \pi_2 = \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right), \pi_3 = \frac{5}{4} \sqrt{14} \left(X^3 - \frac{3}{5} X \right)$$

3)

a. Soit $P \in E$, $\|P\|^2 = \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$. Comme $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est une base de E , on peut décomposer de manière unique P dans cette base :

$$P = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i$$

b. Et comme la base est orthonormale :

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 = \|P\|^2 = \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$$

c. (i) Considérons $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne naturelle, par le produit scalaire naturel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la

base canonique est alors une base orthonormale. Appliquons la formule de Cauchy aux vecteurs $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\text{et } U' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d \end{pmatrix} :$$

$$|< U, U' >| = |aa' + bb' + cc' + dd'| \leq ||U|| ||U'|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}$$

(ii) En appliquant cette formule à $P(x) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i(x)$, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2}}_{=1} \sqrt{\sum_{i=0}^3 \pi_i^2(x)} = \sqrt{\sum_{i=0}^3 \pi_i^2(x)}$$

d. Donc :

$$\forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \sup_{x \in [-1, 1]} \pi_i^2(x)} \Rightarrow \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \sup_{x \in [-1, 1]} \pi_i^2(x)}$$

Les fonctions π_i^2 sont continues sur le segment $[-1, 1]$ et y sont donc bornées, d'où l'existence des bornes supérieures.

Bien sûr, $\sup_{x \in [-1, 1]} \pi_0^2 = \frac{1}{2}$, $\sup_{x \in [-1, 1]} \pi_1^2 = \frac{6}{4}$. La fonction π_2 est représentée par une parabole de sommet $(0, -\frac{\sqrt{10}}{4})$.

$\pi_2(1) = \frac{\sqrt{10}}{2}$. En raison de la parité, on a donc $\sup_{x \in [-1, 1]} \pi_2^2 = \frac{10}{4}$.

La fonction π_3 est impaire. On l'étudie sur $[0, 1]$. $\pi_3'(x) = \frac{15}{4} \sqrt{14} \left(X^2 - \frac{1}{5} \right)$. π_3 est donc décroissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{5}}]$, croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1]$. On vérifie facilement que $\sup_{x \in [-1, 1]} \pi_2^2 = \pi_3^2(1) = \frac{14}{4}$. D'où :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \sup_{x \in [-1, 1]} \pi_i^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6}{4} + \frac{10}{4} + \frac{14}{4}} = 2\sqrt{2}$$