

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - 2004

Corrigé rédigé par Alain SCHAUBER - alain.schauber@prepas.org

## - PARTIE I -

**Question 1 :** Réponse d) : c'est une question de cours.

**Question 2 :** Réponse e) :  $\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ .

**Question 3 :** Réponse b) :

En posant  $x = 1 + u$ , on a  $f_0(1+u) = \frac{1}{u} \times \ln(1+u) \times \frac{1}{2+u}$ .

On utilise alors les développements des deux questions précédentes au voisinage de 0, puis on remplace  $u$  par  $x - 1$ .

**Question 4 :** Réponse d) :

La réponse a) est manifestement fautive et la réponse b) est fautive pour  $x = 1$  car  $k_n$  et  $k_0$  ne sont pas nécessairement égaux.

Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $x^n$  au voisinage de 1 s'obtient en posant  $x = 1 + u$  puis en développant  $(1+u)^\alpha$  pour  $\alpha = n$  au voisinage de 0, et en remplaçant ensuite  $u$  par  $x - 1$ .

**Question 5 :** Réponse e) :

Pour  $x \neq 1$ , on a  $f_n(x) = x^n f_0(x)$ . On peut donc multiplier les développements limités des questions 3 et 4 et on trouve  $\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$ .

**Question 6 :** Réponse b) : c'est la valeur prise par le terme constant du développement limité de la question 5.

**Question 7 :** Réponse c) :

L'argument proposé à la réponse c) est juste, contrairement à ceux proposés dans les réponses b) et d). De ce fait, la réponse a) est exclue.

**Question 8 :** Réponses b) et c) :

On prend le développement limité d'ordre 1, ce qui donne la réponse b). Le polynôme obtenu se développe en la réponse c).

**Question 9 :** Réponse a) : au voisinage de 1,  $f_n - h_n$  est équivalente au terme d'ordre 2 dans le résultat de la question 5.

**Question 10 :** Réponse c) : calcul des racines d'un polynôme du second degré.

**Question 11 :** Réponse d) :

D'après la question 9, la courbe  $C_n$  est au dessus de sa tangente si et seulement si  $Q(n) \geq 0$ , ce qui équivaut à  $n \notin ]x_1; x_2[$ . Or  $0 < x_1 < 1 < 2 < x_2 < 3$ .

**Question 12 :** Réponses a) et d) : on calcule ces dérivées et on vérifie que la réponse d) s'étend bien à  $n = 0$ .

**Question 13 :** Réponse b) : la réponse a) est juste pour  $n \geq 1$ , mais pas pour  $n = 0$ .

**Question 14 :** Réponse b) :  $t_1(x) = f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ . Cela exclut a) et c).  $t_n$  n'étant pas définie pour  $n = 0$ , d) est exclue.

**Question 15 :** Réponse c) :  $\varphi'_0(x) = \frac{2(1-x^2)}{x^3}$ .

**Question 16 :** Réponse b) :

On utilise la question 12, et d'après la question 15 on a  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \varphi_0(x) < \varphi_0(1) = 0$ . Par ailleurs, la réponse d) est fautive, aucune des limites énoncées n'est correcte.

**Question 17 :** Réponses b) et c) : réponses évidentes, qui excluent les autres.

**Question 18 :** Réponse e) :

$f'_1(x) = \frac{(x^2+1)\varphi_1(x)}{(x^2-1)^2}$ . Or  $\varphi'_1(x) = -\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}$ , donc  $\varphi_1$  est strictement décroissante de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

Comme  $\varphi_1(1) = 0$ , on en déduit que  $f_1$  est croissante sur  $[0; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty]$ , ce qui exclut les réponses a) et b). De plus, on a  $f_1(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ , ce qui exclut d).

Enfin,  $f_2(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ , ce qui exclut aussi la réponse c).

## - PARTIE II -

**Question 19 :** Réponse b) : par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.

**Question 20 :** Réponses a) et c) :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} b+c-\lambda & c-a & b-a \\ c-b & a+c-\lambda & a-b \\ b-c & a-c & a+b-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2c-\lambda & 2c-a & a \\ c-b & a+c-\lambda & a-b \\ 0 & 2a-\lambda & 2a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2a-\lambda)(2c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & a+c-\lambda & a-b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 - C_3 \\ = \end{matrix} (2a-\lambda)(2c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c-b & 2b-\lambda & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si on poursuit ce calcul en développant par rapport à la 2<sup>ème</sup> colonne, on trouve  $\Delta = (2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$ , et on vérifie que l'expression proposée à la réponse a) fournit le même résultat, après développement par rapport à la 1<sup>ère</sup> colonne.

**Question 21 :** Réponse e) :

Il est clair que  ${}^t A \neq A$ .

De plus,  $A$  est inversible si et seulement si  $\Delta$  ne s'annule pas en 0, ce qui équivaut à  $abc \neq 0$ .

**Question 22 :** Réponse c) : voir les commentaires des questions 20 et 21.

## - PARTIE III -

Dans cette partie, on notera  $a_n = \inf_{p \geq n} x_p$ ,  $b_n = \sup_{p \geq n} x_p$ ,  $\alpha_n = \inf_{p \geq n} y_p$ ,  $\beta_n = \sup_{p \geq n} y_p$ , et  $a, b, \alpha, \beta$  leurs limites.

**Question 23 :** Réponse c) :

La suite  $a_p$  est bornée (donc minorée et majorée) par les mêmes bornes que la suite  $x_n$ . D'autre part,  $\forall n \geq p+1, n \geq p \Rightarrow a_p \leq x_n$ . Donc  $a_p$  minore  $\{x_n, n \geq p+1\}$  et on en déduit que  $a_p \leq a_{p+1}$ . Ainsi  $a_p$  est croissante et majorée, donc convergente.

La réponse d) est une erreur classique...

**Question 24 :** Réponses b) et d) :

La suite  $y_n$  est aussi bornée (par les mêmes bornes que  $x_n$ ), on peut donc reprendre l'argumentaire de la question 23.

**Question 25 :** Réponses a) et d) :

On montre d'abord que  $a \leq \alpha$  (réponse a) ). Pour cela, on considère dans un premier temps un réel  $a' < a$ . Comme la suite  $a_n$  est croissante de limite  $a$ , il existe un indice  $n \geq 1$  tel que  $\forall p \geq n, x_p \geq a'$ . Alors  $\forall p \geq n, x_0 + \dots + x_p \geq x_0 + \dots + x_{n-1} + (p+1-n)a'$ .

En divisant par  $p+1$ , on obtient  $\forall p \geq n, y_p \geq a' + \frac{n(y_{n-1} - a')}{p+1} \geq a' - \frac{n|y_{n-1} - a'|}{p+1}$ .

Fixons maintenant  $p \geq n$ . On a  $\forall q \geq p, y_q \geq a' - \frac{n|y_{n-1} - a'|}{q+1} \geq a' - \frac{n|y_{n-1} - a'|}{p+1}$ .

Ceci étant vrai pour tout  $q \geq p$ , on a aussi  $\alpha_p \geq a' - \frac{n|y_{n-1} - a'|}{p+1}$ . Dans cette dernière égalité, on peut passer à la limite terme à terme en  $p$  et on obtient  $\alpha \geq a'$ .

Dans un deuxième temps, on fait tendre  $a'$  vers  $a$ . En passant à la limite dans l'inégalité  $\alpha \geq a'$ , on obtient bien  $\alpha \geq a$ .

Pour montrer d), on peut remarquer que  $\inf_{p \geq n} (-x_p) = -\sup_{p \geq n} x_p$  (idem pour la suite  $y_n$ ) et que la suite  $-y_n$  est associée à la suite  $-x_n$ , d'où en utilisant a) :

$$-\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{p \geq n} y_p \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{p \geq n} -y_p \right) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{p \geq n} -x_p \right) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{p \geq n} x_p \right).$$

**Question 26 :** Réponses a) et d) :

La réponse a) est une simple vérification.

Les 4 suites dont on considère les limites dans d) valent (de gauche à droite) :  $-1, 0, \frac{1}{2E[n/2] + 1}$  et  $1$ .

**Question 27 :** Réponse b) :

La réponse a) est fautive, car  $\forall p \geq n, l - \epsilon \leq x_p \leq l + \epsilon \Rightarrow \forall p \geq n, l - \epsilon \leq a_p \leq l + \epsilon$ . Donc  $x_n$  converge  $\Rightarrow a_n$  converge.

La réponse b) est illustrée par la suite  $x_n$  de la question 26.

La réponse c) est contradictoire avec l'exemple de la suite  $x_n$  de la question 26.

La réponse d) est contradictoire avec l'exemple des suites  $x_n$  et  $y_n$  de la question 26.

**Question 28 :** Réponse b) :

La réponse a) supposerait  $\theta_n = u_n^{-\alpha} (u_n - u_{n+1}) < 0$  à partir d'un certain rang, donc  $u_n$  strictement croissante à partir d'un certain rang, ce qui contredit  $u_n > 0$  et convergente vers 0.

Comme  $A \neq 0$ , on a donc nécessairement la réponse b) correcte.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\theta_n}{u_n^{1-\alpha}}, \text{ avec } \frac{\theta_n}{u_n^{1-\alpha}} \rightarrow 0.$$

$$\text{D'où } x_n = u_n^{1-\alpha} \left( \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)^{1-\alpha} - 1 \right) = u_n^{1-\alpha} \left( 1 - \frac{(1-\alpha)\theta_n}{u_n^{1-\alpha}} + o\left(\frac{\theta_n}{u_n^{1-\alpha}}\right) - 1 \right) \sim (\alpha-1)\theta_n \rightarrow (\alpha-1)A.$$

**Question 29 :** Réponse a) :

Le lemme de Césaro (exercice classique de 1<sup>ère</sup> année) affirme que si une suite  $x_n$  converge, alors la suite  $y_n$  associée converge vers la même limite. On peut retrouver ce résultat rapidement (programme de 2<sup>ème</sup> année) en remarquant que puisque la série dont le terme général est la constante  $(\alpha-1)A$  diverge grossièrement et que  $x_n \sim (\alpha-1)A$ , la somme partielle de la série  $\sum x_n$  est équivalente à la somme partielle de la série  $\sum (\alpha-1)A$ , c'est-à-dire à  $(n+1)(\alpha-1)A$ . D'où  $y_n \sim (\alpha-1)A$ .

Le numérateur de la suite  $y_n$  associée à  $x_n$  est une somme télescopique, d'où  $y_n = \frac{u_{n+1}^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha}}{n+1} \sim \frac{u_{n+1}^{1-\alpha}}{n+1}$ .

Or d'après la réponse a),  $y_n \rightarrow (\alpha-1)A$ . Donc  $u_n^{1-\alpha} \sim n(\alpha-1)A$  et enfin  $u_n \sim [(\alpha-1)A]^{1-\alpha} n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

## - PARTIE IV -

**Question 30 :** Réponse e) :

On sait que  $\frac{\sin t}{t}$  tend vers 1 en 0. Par suite,  $g$  n'est pas continue en 0 si  $l \neq 1$ , ce qui exclut la réponse a).

On suppose donc  $l = 1$ .  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; \frac{\pi}{2}]$ , et  $g'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$ , dont on montre à l'aide de développements limités qu'elle admet une limite nulle en 0. Le théorème de prolongement d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  s'applique et on en déduit que pour  $l = 1$ ,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

Il faut néanmoins écarter la réponse c), à cause de l'usage abusif de la fonction tangente dans l'expression de la dérivée (problème pour  $t = \frac{\pi}{2}$ ).

**Question 31 :** Réponse d) :

La fonction  $g'$  est négative sur  $]0; \frac{\pi}{2}]$  (utiliser pour  $t \neq \frac{\pi}{2}$  l'expression proposée à la réponse c) de la question 30), donc  $g$  est décroissante sur cet intervalle. Elle est alors décroissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  si et seulement si on choisit  $l \geq \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1$ .

**Question 32 :** Réponse c) :

La réponse a) est contradictoire avec le sens de variation de  $g$ .

L'inégalité de droite de la réponse b) est fautive si  $l < 1$ , d'après l'argumentaire de la question 31.

De même, l'inégalité de droite de la réponse c) est vraie sur  $]0; \frac{\pi}{2}]$ . Quant à l'inégalité de gauche, elle résulte de la concavité de la fonction sinus sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ; l'arc étant sous la corde entre les deux bornes, on a  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ , soit  $\frac{2}{\pi} \leq g(t)$ .

La réponse d) est fautive pour  $l \geq 1$ .

# - GRILLE DE RÉPONSES -

	a	b	c	d	e
01	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
02	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
03	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
04	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
05	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
06	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
07	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
08	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
09	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
17	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
20	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
24	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
25	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
26	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
27	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
28	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
29	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
30	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
31	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
32	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>