

# CCP PSI1 2007

## un corrigé

Les calculatrices étant autorisées, les réponses aux questions “calculatoires” seront données sans explication (ceci signifiant que le calcul a été fait à la machine).

### 1 Les suites $\alpha$ et $\beta$ .

1.1. On a

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 9$$

1.2. On procède par récurrence sur  $n$  pour montrer que

$$\forall n \geq 2, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$$

- $\alpha_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$ . Le résultat est donc vrai au rang 2.
- Soit  $n \geq 2$  tel que  $\alpha_n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De plus  $\alpha_n \geq 1$  donc  $\alpha_{n+1} \geq n+1-1 \geq n \geq 2$  et donc  $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}^*$  et le résultat est vrai au rang  $n+1$ .

Comme  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}$ , on a donc prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

2.1. On a

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2, \beta_4 = 9$$

2.2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k n(n-1) \dots (k+1) \right)$$

et  $\beta$  est un entier relatif comme somme de tels entiers.

2.3. On a

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \left( \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) = (-1)^{n+1}$$

2.4.  $\beta_0 = \alpha_0 = 1$  et les suites  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \beta_n$$

3.1. La suite de terme général  $z_k = \frac{(-1)^k}{k!}$  vérifie les hypothèses de la règle spéciale (signe alterné, décroissance en module et convergence vers 0). La série correspondante a donc un reste d'ordre  $n$ ,  $\rho_n$ , du signe de  $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ . On a donc  $\rho(n)$  qui est positif si  $n$  est impair et négatif si  $n$  est pair.

3.2. La règle spéciale indique aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\rho_n| \leq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c'est à dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité est stricte car  $\frac{1}{k!}$  est strictement décroissante et donc on a une inégalité stricte dans le résultat sur les restes provenant de la règle spéciale

3.3. On a  $\frac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$  et donc

$$\forall n \geq 1, |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

D'après le dernier rappel du préambule,  $\beta_n$  est l'entier naturel le plus proche de  $e^{-1}n!$ .

4.1. Sur  $] -1, 1[$ , on a

$$f(0) = 1, f'(x) - \frac{x}{1-x}f(x) = 0$$

Comme  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$  est continue sur  $] -1, 1[$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire s'applique et  $f$  existe et est unique (on a ici un problème de Cauchy).

En écrivant que  $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ , on obtient que  $x \mapsto -x - \ln(1-x)$  est une primitive sur  $] -1, 1[$  de  $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ . Il existe alors une constante  $c$  telle que

$$\forall x \in ] -1, 1[, f(x) = c \exp(-x - \ln(1-x)) = \frac{ce^{-x}}{1-x}$$

Comme  $f(0) = 1$ , on en déduit que  $c = 1$  et donc que

$$\forall x \in ] -1, 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4.2. L'expression précédente montre, par théorèmes généraux, que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque : on peut aussi montrer par récurrence sur  $n$  que  $f \in C^n(] -1, 1[)$  est vraie pour tout  $n$  en utilisant seulement l'équation différentielle.*

4.3. On a donc

$$\forall x \in ] -1, 1[, (1-x)f(x) = e^{-x}$$

En dérivant  $n+1$  fois cette relation par formule de Leibnitz on obtient (avec un abus de notation)

$$\forall x \in ] -1, 1[, \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1-x)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$$

$(1-x)^{(k)}$  étant nul pour  $k \geq 2$ , ceci devient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

4.4. Appliquons cette relation en  $x = 0$  :

$$f^{(n+1)}(0) = (n+1)f^{(n)}(0) + (-1)^{n+1}$$

Les suites  $(\beta_n)$  et  $(f^{(n)}(0))$  ont même premier terme et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1 : elles sont égales et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = f^{(n)}(0)$$

## 2 La suite $\gamma$ .

1.  $\mathcal{S}_1$  possède un unique élément (l'identité) et

$$\gamma_1 = 0$$

Dans  $\mathcal{S}_2$ , il y a l'identité et la transposition  $\langle 1, 2 \rangle$ . On donc

$$\gamma_2 = 1$$

2. L'identité de  $[[1, 3]]$  a trois points fixes.

Les transpositions  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 1, 3 \rangle$  et  $\langle 2, 3 \rangle$  ont un point fixe.

Les cycles  $\langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\langle 1, 3, 2 \rangle$  n'ont pas de point fixe et on a donc

$$\gamma_3 = 2$$

3.1.  $\tau$  a deux points fixes si et seulement deux éléments sont permutés et deux autres laissés fixes c'est à dire si et seulement si  $\tau$  est une transposition. Il y a donc  $\binom{4}{2} = 6$  telles permutations.

3.2.  $\tau$  possède un unique point fixe  $a$  si et seulement si  $\tau$  permute circulairement les éléments de  $[[1, 4]] \setminus \{a\}$  (deux choix possibles). Comme on a quatre choix pour  $a$ , il y a  $8 = 2 * 4$  telles permutations.

3.3. Si un élément possède trois points fixes, il en a quatre et c'est l'identité. Il y a 24 éléments dans  $\mathcal{S}_4$ . On a donc

$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9$$

4.1. On a  $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$ .

4.2. Une permutation possédant exactement  $k$  points fixes est caractérisée par le choix de ces points fixes ( $k$  parmi  $n$ ) et une permutation sans points fixes des  $n - k$  restant ( $\gamma_{n-k}$  choix). Ainsi, il y a  $\binom{n}{k} \gamma_{n-k}$  permutations ayant  $k$  points fixes.

4.3.  $\mathcal{S}_n$  est la réunion disjointe des ensembles  $T_{n,k}$  des éléments de  $\mathcal{S}_n$  ayant exactement  $k$  points fixes. En passant au cardinal, on a donc

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{n-k}$$

Comme  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , on a donc (avec un changement d'indice  $j = n - k$ )

$$n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_j$$

5.1. On a bien sûr  $\gamma_n \leq n!$  (il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations) et donc

$$0 \leq \frac{\gamma_n}{n!} |x|^n \leq |x|^n$$

est borné si  $|x| \leq 1$ . Par lemme d'Abel, la série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.

5.2.  $g$  est, par définition, développable en série entière de rayon de convergence au moins 1,  $\exp$  est développable en série entière de rayon de convergence infini.  $h$  est donc développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à  $\min(1, +\infty) = 1$  et son développement s'obtient par produit de Cauchy :

$$\forall x \in ]-1, 1[, h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{j=0}^n \frac{\gamma_j}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_j = 1$$

5.3. On en déduit que

$$\forall x \in ]-1, 1[, h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

et donc

$$\forall x \in ]-1, 1[, g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x)$$

On en déduit (si une fonction est développable, son développement est le développement de Taylor) que

$$\forall x \in ]-1, 1[, g(x) = f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$

Comme  $\frac{\beta_n}{n!} \rightarrow e^{-1}$ , la suite  $\frac{\beta_n}{n!} x^n$  est bornée si et seulement si  $|x| \leq 1$ . Le rayon de convergence vaut exactement 1.

5.4. Le calcul de la question précédente et l'unicité du développement en série entière indique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = \gamma_n$$

5.5.  $\beta_n/n! \rightarrow e^{-1}$  est le terme général d'une série divergente.  $g$  n'est donc pas définie en 1.

5.6. De la même façon,  $g$  n'est pas définie en  $-1$  (série grossièrement divergente).

5.7. On a

$$\gamma_8 = \alpha_8 = 14833$$

### 3 Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$ .

1.1. On a

$$|J_n| \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

1.2.  $(v_n)$  est une suite alternée, de limite nulle en l'infini. En outre

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^1 e^x (x^n - x^{n+1}) dx \geq 0$$

car  $\forall x \in [0, 1], e^x (x^n - x^{n+1}) \geq 0$  (et les bornes sont dans le bon sens). On peut donc appliquer la règle spéciale pour affirmer que  $\sum (v_n)$  converge.

2.1. L'égalité de Taylor avec reste intégrale indique que si  $u$  est une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur l'intervalle  $I$  et si  $a \in I$  alors

$$\forall x \in I, u(x) = u(a) + \sum_{k=1}^n \frac{u^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u^{(n+1)}(t) dt$$

En appliquant ceci avec  $u = \exp$ ,  $I = \mathbb{R}$  et  $a = 0$ , on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

2.2. Pour  $x = -1$ , on a donc

$$e^{-1} = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t dt$$

Le changement de variable  $u = 1 + t$  donne alors

$$\delta_n = n!e^{-a} - \beta_n = e^{-1}v_n$$

3. Comme  $\sum(v_n)$  converge, il en est de même de  $\sum(\delta_n)$ .

Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$$

et donc  $J_n = e - nJ_{n-1}$ . Comme  $J_n \rightarrow 0$ , on a donc  $nJ_{n-1} \rightarrow e$  et ainsi

$$J_n \sim \frac{e}{n+1}$$

$|v_n| = J_n$  est le terme général d'une série divergente et  $\sum(\delta_n)$  n'est donc pas non plus absolument convergente.

4.1. Avec l'équivalent précédent, on a

$$\frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1} \frac{J_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme d'une série absolument convergente.

4.2.1  $u : x \mapsto e^x \ln(1-x)$  est continue sur  $[0, 1[$ . On a un unique problème d'intégrabilité au voisinage de 1. Or,

$$u(1-t) = e^{1-t} \ln(t) \sim e \ln(t) = o_0(1/\sqrt{t})$$

par croissances comparées. Par comparaison aux fonctions de Riemann,  $u$  est intégrable au voisinage de 1. Elle l'est donc sur  $[0, 1[$  et a fortiori l'intégrale  $A$  existe.

4.2.2 On a

$$\forall x \in [0, 1[, -e^x \ln(1-x) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^x x^k}{k}$$

- $f_k : x \mapsto \frac{e^x x^k}{k}$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc intégrable sur ce segment.
- $\sum(f_k)$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers  $x \mapsto -e^x \ln(1-x)$  qui est continue sur  $[0, 1[$ .
- On a

$$\int_0^1 |f_k(x)| dx = \frac{J_k}{k} \sim \frac{e}{k^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$A = \sum_{k \geq 1} \int_0^1 \frac{e^x x^k}{k} dx = \sum_{k \geq 1} \frac{J_k}{k}$$

Comme  $J_n = e|\delta_n|$ , on a donc

$$\sum_{k \geq 1} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e}$$

4.3.  $\frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = o(1/n^2)$  est le terme général d'une série absolument convergente.

Le changement de variable  $u = 1-x$  donne

$$A = -e \int_0^1 e^{-u} \ln(u) du = -e \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!} du$$

- $g_n : u \mapsto \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!}$  est une fonction continue sur  $]0, 1]$  et intégrable sur  $]0, 1]$  (négligeable devant  $1/\sqrt{u}$  au voisinage de 0 par croissances comparées).
- $\sum(g_n)$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers  $u \mapsto e^{-u} \ln(u)$  qui est continue sur  $]0, 1]$ .

- Une intégration par parties donne, pour  $a > 0$ ,

$$\int_a^1 u^n \ln(u) \, du = \left[ \frac{u^{n+1}}{n+1} \ln(u) \right]_a^1 - \frac{1}{n+1} \int_a^1 u^n \, du$$

En faisant tendre  $a$  vers 0 et en multipliant par  $1/n!$ , on obtient

$$\int_0^1 |g_n(u)| \, du = - \int_0^1 \frac{u^n \ln(u)}{n!} \, du = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$A = -e \sum_{n \geq 0} \int_0^1 g_n(u) \, du = e \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

On a finalement

$$\sum_{k \geq 1} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

4.4.  $\frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$  est le terme général d'une suite alternée vérifiant les hypothèses de la règle spéciale.

On a donc

$$\left| \sum_{n \geq N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^2 N!}$$

Pour  $N = 4$ , on a  $\frac{1}{(N+1)^2 N!} = \frac{1}{600}$  et donc

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600} \quad \text{pour} \quad \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} = \frac{229}{288}$$