Corrigé - Concours Centrale - Supélec
Filière PC - Année 2007 -Mathématiques 1

Partie I

I.A -

I.A.1) Comme $x \mapsto |x^n f(x)|$ est continue et paire, il suffit de montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Elle résulte de ce que $\lim_{+\infty} x^2|x^n f(x)| = 0$ (comparaisons usuelles) et de la règle de Riemann.

I.A.2) Comme $x \mapsto xf(x)$ est impaire et intégrale, $m_1 = \int_{\mathbb{R}_-} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_+} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

I.A.3) On effectue une intégration par parties sur un segment, en intégrant $x \mapsto xe^{x^2/2}$ et en dérivant $x \mapsto x^{n-1}$:

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-x^{n-1}e^{-x^2/2}\right]_a^b + (n-1)\int_a^b x^{n-2}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right).$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on obtient

$$m_n = (n-1)m_{n-2}.$$

On démontre ensuite par récurrence sur k la propriété

$$\mathcal{P}_k : \qquad m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad \text{et} \quad m_{2k+1} = 0.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de montrer que $m_0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (l'énoncé demande de l'admettre), et que $m_0 = 0$ (on vient de le prouver). Si $\mathcal{P}_{k-1}$ est vraie, la relation de récurrence établie ci-dessus montre que $m_{2k+1} = 2km_{2k-1} = 0$, et

$$\begin{aligned} m_{2k+2} &= (2k+1)m_{2k}, \\ &= (2k+1)\frac{(2k)!}{2^k k!}, \\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)} \times \frac{(2k)!}{2^k k!}, \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

I.B - On calcule

$$\begin{aligned} e^{-xt}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-xt - \frac{x^2}{2}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{t^2}{2}\right), \\ &= c\exp\left(-\frac{1}{2}(x+t)^2\right), \end{aligned}$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{t^2/2}$ est une constante par rapport à la variable d'intégration x. La translation de la variable $u = x + t$ montre que $x \mapsto e^{-xt}f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $u \mapsto e^{-u^2/2}$ l'est, ce qu'on a établi dès la première question. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-xt}f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = c\sqrt{2\pi} = e^{t^2/2}.$$

I.C -

I.C.1) On reconnaît la somme de la série exponentielle : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = e^{-xt}f(t)$.

I.C.2) La suite (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue par morceaux $x \mapsto e^{-xt}f(x)$. L'inégalité triangulaire montre l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |S_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!}f(x) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|tx|^k}{k!}f(x) = e^{|tx|}f(x).$$

Comme $x \mapsto e^{|t|x}f(x)$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}$ (question I.B), le théorème de convergence dominée prouve que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} S_n, \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{R}}\frac{(-1)^k t^k x^k}{k!}f(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k\frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

I.C.3) D'après les expressions des moments m_k (question I.A.3), on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t^2/2)^k}{k!} = e^{t^2/2}.$$

Partie II

II.A - La fonction f vérifie l'inégalité de définition de E avec $M(f)=1$ et $\lambda=1$, donc elle appartient à E, qui n'est donc pas vide. Soient ensuite g_1 et g_2 deux éléments de E, et α_1 et α_2 deux scalaires. On note $M(g_1)$, $M(g_2)$, λ_1 et λ_2 des nombres réels (strictement) positifs caractérisant l'appartenance de g_1 et g_2 à E. On pose

$$\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2),$$

C'est un nombre réel strictement positif vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(-\lambda_1^2 x^2, -\lambda_2^2 x^2) \leqslant -\lambda^2 x^2.$$

La croissance de la fonction exponentielle montre que $\max(f(\lambda_1 x), f(\lambda_2, x)) \leqslant f(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)| &\leqslant |\alpha_1| M(g_1) f(\lambda_1 x) + |\alpha_2| M(g_2) f(\lambda_2 x), \\ &\leqslant K f(\lambda x),\end{aligned}$$

où K est le nombre réel positif $|\alpha_1|M(g_1)+|\alpha_2|M(g_2)$, ce qui montre que $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in F$. En tant que partie non vide et stable par combinaison linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel muni des lois usuelles.

II.B -

II.B.1) Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u(x)| \leqslant M(u) f(\lambda x)$ et $|v(x)| \leqslant M(v) f(\mu x)$. Alors, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|u(t)v(x-t)| &\leqslant M(u)M(v) f(\lambda t) f(\mu(x-t)), \\ &= \frac{M(u)M(v)}{2\pi} \exp\left(\frac{-\lambda^2 t^2 - \mu^2 (t-x)^2}{2}\right), \\ &= K e^{-[\lambda^2+\mu^2]t^2/2 + \mu^2 t x},\end{aligned}$$

où K est la constante $M(u)M(v)e^{-\mu^2 x^2/2}/2\pi$ (constante par rapport à la variable d'intégration t). Les comparaisons usuelles montrent que $\lim_{t\to\pm\infty} t^2 e^{-[\lambda^2+\mu^2]t^2 + \mu^2 t x} = 0$, donc que $t \mapsto u(t)v(x-t)$, qui est continue, est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x. Finalement, $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II.B.2) La fonction $s \mapsto \varphi(s) = x - s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u * v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(t) v(x-t)\,\mathrm{d}t, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(\varphi(s)) v(x - \varphi(s)) |\varphi'(s)|\,\mathrm{d}s, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x-s) v(s)\,\mathrm{d}s, \\ &= (v * u)(x).\end{aligned}$$

II.B.3) Grâce au changement de variable affine $s = \sqrt{2}(t - x/2)$ et à la valeur $m_1(f) = 1$ admise par l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-(x-t)^2/2}\,\mathrm{d}t, \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2 + xt}\,\mathrm{d}t, \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-x/2)^2 + x^2/4}\,\mathrm{d}t, \\ &= \frac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{2}\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s, \\ &= \frac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

II.B.4) Soit $g : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(t)v(x-t)$, de sorte que $(u*v)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,t)\,\mathrm{d}t$. Comme u et v sont continues, g l'est par rapport au couple (x,t), donc les hypothèses faibles du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont satisfaites. On prouve l'hypothèse forte par une hypothèse de domination locale. Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $c = \max(|a|,|b|)$. Avec les notations de la question II.B.1, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|g(x,t)| &\leqslant M(u)M(v) f(\lambda t) f(\mu(x-t)), \\ &= M(u)M(v) \exp\left(-\frac{\lambda^2+\mu^2}{2} t^2 + \mu^2 t x + \mu^2 x^2\right), \\ &\leqslant M(u)M(v) e^{\mu^2 c^2} \exp\left(-\frac{\lambda^2+\mu^2}{2} t^2 + \mu^2 c|t|\right).\end{aligned}$$

Par comparaison à la fonction de Riemann $t \mapsto 1/t^2$ en $\pm\infty$, on montre que la fonction continue $t \mapsto \exp(-[\lambda^2+\mu^2]t^2/2 + \mu^2 c|t|)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui achève de prouver que $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On pose ensuite $\nu = \min(\lambda, \mu) > 0$. Alors le changement de variable $t = s/\nu$ et la question précédente montrent que

$$\begin{aligned}
|(u*v)(x)| &\leqslant M(u)M(v)\int_{\mathbb{R}} f(\nu t)f(\nu(x-t))\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{M(u)M(v)}{\nu}\int_{\mathbb{R}} f(s)f(\nu x - s)\,\mathrm{d}s,\\
&= \frac{M(u)M(v)}{\nu}(f*f)(\nu x),\\
&= \frac{M(u)M(v)}{2\nu\sqrt{\pi}}e^{-\nu^2x^2/4},\\
&= Kf(\kappa x),
\end{aligned}$$

avec $K = M(u)M(v)/\nu\sqrt{2}$ et $\kappa = \nu/\sqrt{2} > 0$, ce qui achève de prouver que $u * v \in E$.

II.C - Dans cette question $M(u)$ et λ sont des réels positifs (strictement pour le second) tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |u(x)| \leqslant M(u)f(\lambda x)$.

II.C.1) La majoration $|e^{-tx}u(x)| \leqslant M(u)e^{-tx}f(\lambda x)$ et l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto e^{-tx}f(\lambda x)$ sur $\mathbb{R}$ (voir la question I.B, en l'adaptant à l'aide du changement de variable inoffensif $y = \lambda x$), prouvent que $\hat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

II.C.2) Soit $h : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-tx}u(x)$. Il s'agit d'une fonction admettant des dérivées partielles par rapport à t de tout ordre, en particulier aux ordres 1 et 2, et ces dérivées partielles sont des fonctions continues du couple (x,t) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) &= -xe^{-tx}u(x) = -xh(t,x),\\
\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) &= x^2e^{-tx}u(x) = x^2h(t,x).
\end{aligned}$$

Les hypothèses faibles du théorème de Leibniz sont donc satisfaites.

On établit ensuite des dominations locales pour les dérivées partielles : si $[a,b]$ est un segment quelconque de $\mathbb{R}$, et si $c = \max(|a|,|b|)$, alors pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| &\leqslant |x|e^{c|x|}M(u)f(\lambda x)\\
\left|\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t)\right| &\leqslant x^2e^{c|x|}M(u)f(\lambda x).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to\pm\infty} x^k e^{c|x|}f(\lambda x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en vertu des comparaisons usuelles, les fonctions majorantes (continues) sont bien intégrables sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Leibniz affirme alors que u est de classe $\mathcal{C}^2$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\hat{u}'(t) &= -\int_{\mathbb{R}} xe^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x,\\
\hat{u}''(t) &= \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

II.D -

II.D.1) L'application $N : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{t^2 + (x-t)^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$: c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire [1] d'expression

$$\big((x,t)|(x',t')\big) = 2tt' + xx' - xt' - x't.$$

Comme toutes les normes sont équivalentes dans le plan (de dimension finie), il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha\|\ \ \|_2 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \ \|_2$, où $\|\ \ \|_2$ désigne la norme euclidienne canonique. En élevant au carré la première inégalité, puis en multipliant par -1, on obtient

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad -t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2 + x^2).$$

avec $a = \alpha^2 > 0$.

II.D.2) On applique le résultat admis au début de la question II.D à la fonction continue $g : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(t)v(x-t)$. En reprenant les notations de la question II.B.4, en posant $\nu = \min(\lambda,\mu)$, et en utilisant la question précédente, on démontre la majoration

$$\begin{aligned}
|g(x,t)| &\leqslant M(u)M(v)\exp\left(-\nu[t^2 + (x-t)^2]\right),\\
&\leqslant M(u)M(v)\exp\left(-a\nu[t^2 + x^2]\right),\\
&= h_1(x)h_2(t),
\end{aligned}$$

avec $h_1(x) = M(u)M(v)e^{-a\nu x^2}$ et $h_2(t) = e^{-a\nu t^2}$. Les fonctions h_1 et h_2 étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, on conclut que $u * v$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\left(\int_{\mathbb{R}} v(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Dans l'intégrale interne, la translation de la variable $s = x - t$ montre que $\int_{\mathbb{R}} v(x-t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} v(s)\,\mathrm{d}s$, qui ne dépend plus de t. On conclut alors que

$$\int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Si $t^2 + (x-t)^2 = 0$, alors $t = x - t = 0$, donc $x = t = 0$, ce qui établit le caractère défini-positif.

II.D.3) On applique cette fois le résultat admis à la fonction continue $k : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-x\theta}u(t)v(x-t)$. Les mêmes notations qu'à la question précédente montrent que $|k(x,t)| \leqslant M(u)M(v)e^{-x\theta-a\nu(t^2+x^2)} = h_1(x)h_2(t)$ avec cette fois $h_1(x) = M(u)M(v)e^{-xt-a\nu x^2}$ et la même fonction h_2 que précédemment. La nouvelle fonction h_1 étant continue et intégrable, on a

$$\begin{aligned}\widehat{u*v}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x\theta}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x\theta}v(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dans l'intégrale interne, la translation de la variable $s = x - t$ montre que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x\theta}v(x-t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-s\theta}e^{-t\theta}v(s)\,\mathrm{d}s$. On conclut alors que

$$\begin{aligned}\widehat{u*v}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-t\theta}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s\theta}v(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-t\theta}\,\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}} e^{-s\theta}v(s)\,\mathrm{d}s,\\ &= \hat{u}(\theta)\hat{v}(\theta).\end{aligned}$$

Partie III

III.A -

III.A.1) La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E, d'après la question II.B.4. Il ne reste qu'à calculer l'intégrale de h_n. Comme $h_n = h * h_{n-1}$, la question II.D.2 et l'hypothèse $h \in E_1$ montrent que

$$\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{\mathbb{R}} h\int_{\mathbb{R}} h_{n-1} = \int_{\mathbb{R}} h_{n-1}.$$

Une récurrence immédiate montre alors que $\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{\mathbb{R}} h = 1$, donc $h_n \in E_1$.

III.A.2) La question II.D.3 et une récurrence immédiate montrent que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \widehat{h_n}(x) = \left(\hat{h}(x)\right)^n.$$

III.B -

III.B.1) D'après II.B.3, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$, donc $K_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

III.B.2) On va démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'existence d'une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = K_n e^{-x^2/(2n)}$. La propriété est vraie pour $n \in \{1,2\}$. Si elle est vraie au rang $n-1$, alors le changement de variable affine $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(t - \frac{n-1}{n}x\right)$ à la troisième ligne et la valeur $K_1\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1$ donnent

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} K_{n-1}e^{-t^2/(2n-2)}K_1e^{-(x-t)^2/2}\,\mathrm{d}t,\\ &= K_1K_{n-1}e^{-x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2/(2n-2)+xt}\,\mathrm{d}t,\\ &= K_1K_{n-1}e^{-x^2/2+(n-1)x^2/2n}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{n}{2n-2}\left[t-\frac{n-1}{n}x\right]^2\right)\mathrm{d}t,\\ &= K_1K_{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n}}e^{-x^2/2n}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s,\\ &= K_{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n}}e^{-x^2/2n}.\end{aligned}$$

On en déduit l'existence et la valeur de K_n : $K_n = K_{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Il s'ensuit que

$$K_n = K_1\sqrt{\frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}} = \frac{K_1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}.$$

III.B.3) D'après les questions III.A.2 et I.B, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \widehat{f_n}(x) = (\hat{f}(x))^n = (e^{x^2/2})^n = e^{nx^2/2}.$$

On en déduit que $\widehat{f_n}(t/\sqrt{n}\,) = e^{t^2/2}$ ne dépend pas de n, donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{t^2/2}.$$

III.C -

III.C.1) Il s'agit de vérifier trois propriétés.

i. La fonction g est bien continue : comme elle est paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Elle est évidemment continue en tout point de $\mathbb{R}_+ \setminus \{\pi/2\}$. En $x_0 = \pi/2$, on a $\lim_{x_0^-} g(x) = \lim_{x_0^-}\frac{1}{2}\cos x = 0 = g(x_0)$ et $\lim_{x_0^+} g(x) = \lim_{x_0^+} 0 = 0$, donc g est aussi continue en $\pi/2$, et finalement, elle l'est sur $\mathbb{R}$.

ii. La fonction g appartient à E : comme $g(x) \leqslant 1/2$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (et vaut zéro ailleurs), comme f et g sont paires, comme $x \mapsto Mf(\lambda x)$ décroît sur $\mathbb{R}_+$ pour M et $\lambda > 0$, il suffit de choisir M et λ de sorte que $1/2 \leqslant Mf(\lambda\pi/2) = Me^{-\lambda^2\pi^2/8}$. On peut, par exemple, prendre $\lambda = 2007$ et $M = \frac{1}{2}e^{2007^2\pi^2/8}$.

iii. La fonction g appartient à E_1 : en effet, la définition et la parité de g permettent d'écrire que $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

III.C.2) On démontre un résultat un peu plus général, qui sera utile par la suite : si g_1 et g_2 sont deux fonctions paires appartenant à E, alors $g_1 * g_2$ est paire. Pour cela, on calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(g_1 * g_2)(-x) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(t)g_2(-x-t)\,\mathrm{d}t,\\
&= \int_{\mathbb{R}} g_1(t)g_2(x+t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par parité de } g_2\text{)},\\
&= \int_{\mathbb{R}} g_1(-u)g_2(x-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(par changement de variable } u=-t\text{)},\\
&= \int_{\mathbb{R}} g_1(u)g_2(x-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(par parité de } g_1\text{)},\\
&= (g_1 * g_2)(x).
\end{aligned}$$

Comme g est paire, on en déduit que $g * g$ est paire, et plus généralement que g_n est paire.

Par définition de g, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(g*g)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. Comme $x-\pi/2 \leqslant x-t \leqslant x+\pi/2$, si $x > \pi$, alors $g(x-t) = 0$ dans l'intégrale précédente, donc

$$\forall x \in]\pi, +\infty[, \quad (g*g)(x) = 0.$$

Si $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alors

$$\begin{aligned}
(g*g)(x) &= \frac{1}{4}\int_{x-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{1}{8}\int_{x-\pi/2}^{\pi/2}[\cos(x)+\cos(2t-x)]\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{\pi-x}{8}\cos(x) + \frac{1}{16}[\sin(2t-x)]_{t=x-\pi/2}^{\pi/2},\\
&= \frac{1}{8}\left((\pi-x)\cos x + \sin x\right).
\end{aligned}$$

III.C.3) On va démontrer par récurrence l'existence de a_n. On sait que a_1 existe et vaut $\pi/2$ par définition, et on vient de montrer que a_2 existe et qu'on peut prendre $a_2 = \pi$. On suppose que a_{n-1} existe. Comme g_n est paire (voir la question précédente), il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Si $x > a_{n-1} + \pi/2$, alors

$$g_n(x) = (g * g_{n-1})(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi} 2\cos(t)g_{n-1}(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$$

puisque $x - t \geqslant x - \pi/2 > a_{n-1}$ dans la dernière intégrale, et que g_{n-1} est nulle sur $[a_{n-1}, +\infty[$. Par conséquent, a_n existe et la valeur $a_n = a_{n-1} + \pi/2$ convient, donc g_n est nulle en dehors de l'intervalle $[-n\pi/2, n\pi/2]$.

III.C.4) On obtient

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2} \pi/2 e^{-xt}\cos x\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-xt+ix}\,\mathrm{d}x\right),\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{-xt+ix}}{-t+i}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2}\right),\\
&= \frac{\operatorname{Re}((-t-i)(ie^{-\pi t/2} - (-i)e^{\pi t/2}))}{2(1+t^2)},\\
&= \frac{\operatorname{ch}(\pi t/2)}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

III.C.5. D'après la question III.A.2 et grâce à un développement limité quand n tend vers $+\infty$ à t fixé, on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(\hat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,\\
&= \left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2\sqrt{n})}{1+t^2/n}\right)^n,\\
&= \left(\frac{1+\pi^2t^2/8n + \mathrm{o}(1/n)}{1+t^2/n}\right)^n,\\
&= \left(\left[1+\frac{\pi^2t^2}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{t^2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)^n,\\
&= \left(1+\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)\frac{t^2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,\\
&= \exp\left(n\ln\left[1+\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)\frac{t^2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right),\\
&= \exp\left(\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)t^2+\mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\widehat{g_n}(t/\sqrt{n}) = e^{(\pi^2/8-1)t^2}$.

Partie IV

IV.A -

IV.A.1) On parle ici de développements limités en zéro. Cela résulte de la question II.C.2, où l'on a montré que $\widehat{h_n}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et calculé ses dérivées. Comme $\widehat{h_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ($h_n \in E_1$ d'après la question III.C.1), comme $\widehat{h_n}'(0) = -\int_{\mathbb{R}} x h_n(x)\,\mathrm{d}x = -M_{1,n}$ et $\widehat{h_n}''(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)\,\mathrm{d}x = M_{2,n}$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{h_n}(t) &= \widehat{h_n}(0) + \widehat{h_n}'(0)t + \frac{\widehat{h_n}''(0)}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2),\\ &= 1 - M_{1,n}t + \frac{M_{2,n}}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2).\end{aligned}$$

IV.A.2) Par ailleurs, la question III.A.2 montre que $\widehat{h_n}(t) = (\hat{h}(t))^n = (1 - M_{1,1}t + \frac{M_{2,1}}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2))^n = 1 - nM_{1,1}t + \binom{n}{2}M_{1,1}^2t^2 + n\frac{M_{2,1}}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2)$. L'unicité des coefficients d'un développement limité montre que

$$M_{1,n} = nM_{1,1},$$

et que $M_{2,n} = n((n-1)M_{1,1}^2 + M_{2,1})$. Par suite

$$\begin{aligned}V_n &= M_{2,n} - M_{1,n}^2,\\ &= n((n-1)M_{1,1}^2 + M_{2,1}) - n^2M_{1,1}^2,\\ &= n(M_{2,1} - M_{1,1}^2),\\ &= nV_1.\end{aligned}$$

IV.B - Il ne faut pas utiliser le développement limité de la question IV.A., à n fixé et t tendant vers zéro, dont le reste «$\mathrm{o}(t^2)$» dépend de n. En revanche, le reste «$\mathrm{o}(t^2)$» du développement limité de $\hat{h}(t)$ ne dépend pas de n. Alors, d'après la question III.A.2, on a

$$\begin{aligned}\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(\hat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,\\ &= \left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,\\ &= \exp\left(n\ln\left[1 + \frac{M_{2,1}t}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right),\\ &= \exp\left(\frac{M_{2,1}t}{2} + \mathrm{o}(1)\right),\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{M_{2,1}t/2}.$$