

Phénomènes de seuil dans les graphes

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit ρ une permutation du groupe symétrique \mathcal{S}_n et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 ▷ • Soit $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et P_ρ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P_\rho V_j = V_{\rho(j)}$ (P_ρ matrice de permutation, on vérifie pour tous $\rho, \rho' \in \mathcal{S}_n$: $P_\rho P_{\rho'} = P_{\rho\rho'}$ et $P_{\rho^{-1}} = (P_\rho)^{-1}$).

On a

$$P_\rho M V_j = P_\rho \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j} V_i \right) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} V_{\rho(i)}$$

ρ étant inversible donc

$$P_\rho M V_j = \sum_{i=1}^n m_{\rho^{-1}(i),j} V_i$$

de même on trouve

$$M P_\rho V_j = M V_{\rho(j)} = \sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} V_i$$

ainsi

$$P_{\rho^{-1}} M P_\rho V_j = P_{\rho^{-1}} \left(\sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} V_i \right) = \sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} V_{\rho^{-1}(i)}$$

par suite

$$(P_{\rho^{-1}} M P_\rho) V_j = \sum_{i=1}^n m_{\rho(i),\rho(j)} V_i$$

comme $P_{\rho^{-1}} = (P_\rho)^{-1}$ alors $P_{\rho^{-1}} M P_\rho = (P_\rho)^{-1} M P_\rho = (m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, ce qui prouve que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

• Par définition si $M_{G,\text{id}} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $M_{G,\sigma} = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, donc $M_{G,\sigma} = (P_\sigma)^{-1} M_{G,\text{id}} P_\sigma$ ce qui donne

$$M_{G,\sigma} = (P_\sigma)^{-1} \left(P_{\sigma'} M_{G,\sigma'} (P_{\sigma'})^{-1} \right) P_\sigma = P_{\sigma^{-1}\sigma'} M_{G,\sigma'} (P_{\sigma^{-1}\sigma'})^{-1}$$

ainsi $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Une matrice d'adjacence est symétrique réelle, le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable.

3 ▷ Soit une matrice d'adjacence M non nulle telle que $\text{rg}(M) = 1$.

0 est donc valeur propre de M d'ordre supérieur à $n - 1$, soit λ l'autre valeur propre de M .

On a $\text{Tr}(M) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_p(M)} \alpha = \lambda + 0$ donc $\text{Sp}(M) = \{0\}$, comme M est diagonalisable alors elle est égale à la matrice nulle, ce qui est absurde, par suite $\text{rg } M \geq 2$.

(Autre méthode : M est la matrice d'adjacence d'un graphe non vide, il existe donc $i < j$ tels que $m_{i,j} = 1$, et par symétrie, $m_{j,i} = 1$. La sous matrice $\begin{pmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\text{rg } M \geq 2$.)

4 ▷

• Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoile.

¹<https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

Il existe alors des entiers distincts i_0, i_1, \dots, i_d dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ tels que

$$m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

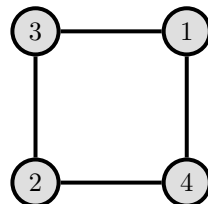
Posons C_1, C_2, \dots, C_n les vecteurs colonnes de M , alors on a pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$C_j = \begin{cases} V_{i_0} & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ V_{i_1} + \dots + V_{i_d} & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarquons que $\text{vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \text{vect}(V_{i_0}, V_{i_1} + \dots + V_{i_d})$ et la famille $(V_{i_0}, V_{i_1} + \dots + V_{i_d})$ est libre, donc $\text{rg } M = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n) = 2$.

- Soit $G = (S, A)$ avec : $S = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, on a

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Le graphe G

le graphe G n'est pas étoilé et sa matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ est de rang 2.

5 ▷ Soit $G' = (A', S')$ une copie de $G = (A, S)$, donc par définition il existe une bijection σ de S' dans S telle que

$$\forall (s', t') \in S'^2 \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A$$

Ce qui signifie

$$(M_{G',\text{id}})_{i,j} = 1 \iff (M_{G,\sigma})_{i,j} = 1$$

donc

$$M_{G',\text{id}} = M_{G,\sigma}$$

d'après la question 1) les matrices $M_{G,\text{id}}$ et $M_{G',\text{id}}$ sont semblable d'où

$$\boxed{\chi_{G'} = \chi_G}$$

6 ▷ On note $\chi_G(X) = \det(XI_n - M_{G,\text{id}}) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

- $M_{G,\text{id}}$ est à diagonale nulle donc $\boxed{a_{n-1} = -\text{tr}(M_{G,\text{id}}) = 0}$.

- Posons $M_{G,\text{id}} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $XI_n - M_{G,\text{id}} = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $P_{i,j} = \begin{cases} X & \text{si } i = j \\ -m_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Par définition du déterminant on a

$$\chi_G(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}$$

Remarquons que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\text{deg} \left(\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} \right) = \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \sigma(i) = i\}$$

Pour $\sigma = \text{id}$ le degré de $\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}$ est n et si σ est une transposition alors le degré de $\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}$ est exactement égal à $n - 2$, dans les autres cas le degré de $\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}$ est strictement inférieur à $n - 2$.

Soit la transposition $\tau = (i j)$ de \mathcal{S}_n , avec $i < j$, alors

$$(-1)^{\varepsilon(\tau)} \prod_{i=1}^n P_{i,\tau(i)} = -m_{i,j}m_{j,i} \prod_{k \notin \{i,j\}} (X - m_{k,k}) = -m_{i,j}^2 X^{n-2}$$

Ainsi en considérant toutes les transpositions le coefficient de X^{n-2} sera donné par

$$a_{n-2} = - \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \\ i < j}} m_{i,j}^2$$

Dans cette somme il ne reste que les coefficients $m_{i,j} = 1$ et $i < j$, donc ceux qui représentent une arête dans A , d'où

$$\boxed{a_{n-2} = -|A|}$$

- Une autre méthode :

$M_{G,\text{id}}$ est symétrique et réelle donc son polynôme caractéristique est scindé : $\chi_G(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, les relations entre les coefficients et les racines donnent : $a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$ qu'on écrit

$$a_{n-2} = \frac{1}{2} \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 - (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) \right)$$

mais $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(M_{G,\text{id}}) = 0$ et $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{tr}((M_{G,\text{id}})^2)$ donc

$$a_{n-2} = \frac{-1}{2} \text{tr}((M_{G,\text{id}})^2)$$

$M_{G,\text{id}}$ est symétrique alors $\text{tr}((M_{G,\text{id}})^2) = \text{tr}(M_{G,\text{id}} M_{G,\text{id}}^\top)$. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel s'exprime par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A B^\top)$, ce qui donne pour toute matrice $M = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\text{tr}(M M^\top) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} \alpha_{i,j}^2$ donc

$$a_{n-2} = \frac{-1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} m_{i,j}^2 = - \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \\ i < j}} m_{i,j}^2 = -|A|$$

7 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$. Reprenons des notations de la question 4), $M = M_{G,\text{id}} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice d'adjacence de G et i_0, i_1, \dots, i_d dans $\llbracket 1;n \rrbracket$ des indices distincts tels que

$$m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

- D'après la question 4) on a $\text{rg } M = 2$ donc $\dim \text{Ker } M = n - 2$ et 0 est une valeur propre de M de multiplicité au moins $n - 2$, le spectre de M est donc de la forme $Sp(M) = \{0, \lambda, \mu\}$ par suite

$$\chi_G(X) = X^{n-2} (X - \lambda) (X - \mu) = X^n - (\lambda + \mu) X^{n-1} + \lambda \mu X^{n-2}$$

d'après la question 6) on a $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda \mu = -|A|$, sachant que les sommets non isolés de G forment une étoile à d branches alors $|A| = d$ et ainsi

$$\boxed{\chi_G = X^{n-2} (X^2 - d) \text{ et } Sp(M) = \{0, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\}}$$

Un calcul direct donne :

- Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_0(M)$, on a

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{n,j} x_j \end{pmatrix} \text{ avec } \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} & \text{si } i = i_0 \\ x_{i_0} & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases}$$

donc

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} = 0 \\ x_{i_0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1} = -x_{i_2} - \dots - x_{i_d} \\ x_{i_0} = 0 \\ x_j \in \mathbb{R}, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases}$$

ainsi

$$E_0(M) = \text{vect}(\{V_j, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\}\} \cup \{V_{i_k} - V_{i_1}, j \notin \{2; d\}\})$$

- Soit $\lambda \in \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(M)$, donc

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} = \lambda x_{i_0} \\ x_{i_0} = \lambda x_{i_1} = \dots = \lambda x_{i_d} \\ x_j = 0, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 x_{i_0} = dx_{i_0} \text{ (évident)} \\ x_{i_1} = \dots = x_{i_d} = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} \\ x_j \in \mathbb{R}, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases}$$

ce qui donne $X = V_{i_0} + \frac{1}{\lambda} V_{i_1} + \dots + \frac{1}{\lambda} V_{i_d}$, ainsi

$$E_\lambda(M) = \text{vect}(\lambda V_{i_0} + V_{i_1} + \dots + V_{i_d}) \text{ avec } \lambda \in \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$$

8 ▷ Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$.

Posons $S_1 = \{s_{1,1}, \dots, s_{p,1}\}$ et $S_2 = \{s_{1,2}, \dots, s_{q,2}\}$ avec $n = p + q$, $s_1 = s_{1,1}$ et $s_2 = s_{1,2}$.

Au début nous allons définir une nouvelle indexation de G qui va nous simplifier le travail :

- Soient σ_1 et σ_2 deux indexations de S_1 et S_2 définies par :

$$\begin{cases} \sigma_1(i) = s_{i,1} \text{ si } i \in \llbracket 1; p \rrbracket \\ \sigma_2(i) = s_{i,2} \text{ si } i \in \llbracket 1; q \rrbracket \end{cases}$$

ce qui donne deux copies de G_1 et de G_2 , notées $G'_1 = (S'_1, A'_1)$ et $G'_2 = (S'_2, A'_2)$, avec $A'_1 = \llbracket 1; p \rrbracket$ et $A'_2 = \llbracket 1; q \rrbracket$.

Une indexation de $S = S_1 \cup S_2$ est donnée par

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma_1(k) & \text{si } k \in \llbracket 1; p \rrbracket \\ \sigma_2(k - p) & \text{si } k \in \llbracket p + 1; n \rrbracket \end{cases}$$

on obtient donc une copie $G' = (S', A')$ de G telle que $S' = S'_1 \cup S'_2$ et $A' = A'_1 \cup A'_2 \cup \{\{1, p + 1\}\}$.

- La matrice d'adjacence s'écrit alors

$$M_{G', \sigma} = \left(\begin{array}{c|c} M_{G'_1, \sigma_1} & E_{1,1} \\ \hline E_{1,1} & M_{G'_2, \sigma_2} \end{array} \right)$$

avec $E_{1,1} = (\delta_{1,i} \delta_{1,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Ce qui donne

$$\chi_G(X) = \chi_{G'}(X) = \left| \begin{array}{c|c} XI_p - M_{G'_1, \sigma_1} & -E_{1,1} \\ \hline -E_{1,1} & XI_q - M_{G'_2, \sigma_2} \end{array} \right|$$

Notons, pour simplifier, les matrices avec leurs colonnes

$$\left(\begin{array}{c|c} XI_p - M_{G'_1, \sigma_1} & 0 \\ \hline 0 & XI_q - M_{G'_2, \sigma_2} \end{array} \right) = [C_1 | C_2 | \dots | C_n]$$

et $XI_n - M_{G', \sigma} = [C_1 - V_{p+1} | C_2 | \dots | C_{p+1} - V_1 | \dots | C_n]$, avec $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le déterminant est n -linéaire donc

$$\chi_G(X) = \underbrace{\det([C_1 | \dots | C_n])}_{\Delta_1} - \underbrace{\det([V_{p+1} | C_2 | \dots | C_n])}_{\Delta_2} - \underbrace{\det([C_1 | \dots | V_1 | \dots | C_n])}_{\Delta_3} + \underbrace{\det([V_{p+1} | C_2 | \dots | V_1 | \dots | C_n])}_{\Delta_4}$$

avec $\mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 1) = p_n$ si $\{i, j\} \in A$, $\mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 0) = q_n$ si $\{i, j\} \notin A$, $|A| = a$ et $|\overline{A}| = N - a$, donc

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}$$

- Pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, posons

$$\Delta_k = \{G = (S, A) \in \Omega_n \mid \text{Card } A = k\}$$

on a

$$\Omega_n = \bigcup_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket} \Delta_k$$

qui est une réunion disjointe ($(\Delta_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une partition de Ω_n) donc

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{k=0}^N \sum_{G \in \Delta_k} \mathbb{P}(\{G\}) = \sum_{k=0}^N p_n^k q_n^{N-k} \text{Card } \Delta_k$$

Posons \mathcal{D} l'ensemble de toutes les parties de cardinal 2 de $\llbracket 0; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ $\mathcal{P}_k(\mathcal{D})$ l'ensemble de toutes les parties de cardinal k de \mathcal{D} .

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'application qui à $G = (S, A)$ associe A est une bijection de Δ_k vers $\mathcal{P}_k(\mathcal{D})$ donc

$$\text{Card } \Delta_k = \text{Card } \mathcal{P}_k(\mathcal{D}) = \binom{N}{k}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} = 1$$

Partie II : Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{N} et admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

11 ▷ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > 0) \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)$.

12 ▷ Supposons que $\mathbb{E}(X) \neq 0$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on a si $X(\omega) = 0$ alors $|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| = \mathbb{E}(X)$ par suite $[X = 0] \subset [|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X)]$.

On en déduit que $\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X))$ et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}$$

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ La variable A_n s'écrit

$$A_n = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{D}} X_{\{i,j\}}$$

où \mathcal{D} désigne l'ensemble de toutes les parties de cardinal 2 de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Card } \mathcal{D} = N$.

Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n .

Pour tout $t \in [-1, 1]$, la fonction génératrice de A_n est donnée par

$$\begin{aligned} G_{A_n}(t) &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{D}} G_{X_{\{i,j\}}}(t) \\ &= (q_n + p_n t)^N \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p_n^k q_n^{N-k} t^k \end{aligned}$$

donc la variable A_n suit la loi binomiale de paramètres (N, p_n) .

14 ▷ On suppose que $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a

$$\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = 1 - (1 - p_n)^N$$

comme $N = \frac{n(n-1)}{2}$ alors

$$\begin{aligned} (1 - p_n)^N &= \exp\left(\frac{n^2 + o(n^2)}{2} (-p_n + o(p_n))\right) \\ &= \exp\left(\frac{-p_n n^2}{2} (1 + o(1))\right) \end{aligned}$$

ainsi $(1 - p_n)^N \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ d'où $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 0}$.

15 ▷ On suppose que $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(p_n)$
D'après la question 12. on a

$$\mathbb{P}(A_n = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2}$$

La variable A_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_n)$ donc

$$\mathbb{E}(A_n) = Np_n \text{ et } \mathbb{V}(A_n) = Np_n(1 - p_n)$$

ce qui donne

$$\frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2} = \frac{1 - p_n}{Np_n} \leq \frac{1}{Np_n}$$

Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(p_n)$ alors $n^2 p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc $\frac{1}{Np_n} = \frac{2}{n(n-1)p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

On en déduit que $\mathbb{P}(A_n = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et puisque $\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0)$ alors $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1}$.

16 ▷ L'étude de l'événement $[A_n > 0]$ nous impose la propriété suivante : \mathcal{P}_n « Un graphe G choisi aléatoirement possède au moins une arête ». La fonction de seuil de \mathcal{P}_n est la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 2}$.

Partie III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17 ▷ Rappelons que Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = \llbracket 1, n \rrbracket$, donc pour tout $G \in \Omega_n$ on a

$$H \subset G \iff A_H \subset A_G \iff A_G = A_H \cup B \text{ avec } B \subset \mathcal{D} \setminus A_H$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} [X_H = 1] &= \{G \in \Omega_n \mid A_G = A_H \cup B \text{ avec } B \subset \mathcal{D} \setminus A_H\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{N-a_H} \left(\bigcup_{\substack{B \subset \mathcal{D} \setminus A_H \\ |B|=k}} \{G \in \Omega_n \mid A_G = A_H \cup B\} \right) \end{aligned}$$

la réunion étant disjointe donc

$$\mathbb{P}(X_H = 1) = \sum_{k=0}^{N-a_H} \sum_{\substack{B \subset \mathcal{D} \setminus A_H \\ |B|=k}} \mathbb{P}(\{(S, A_H \cup B)\})$$

d'après la question 10) on a $\mathbb{P}(\{(S, A_H \cup B)\}) = p_n^{a_H+|B|} q_n^{N-a_H-|B|}$, et on sait que

$$\text{Card}\{B \subset \mathcal{D} \setminus A_H \mid |B| = k\} = \binom{N-a_H}{k}$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_H = 1) &= \sum_{k=0}^{N-a_H} \binom{N-a_H}{k} p_n^{a_H+k} q_n^{N-a_H-k} \\ &= p_n^{a_H} \sum_{k=0}^{N-a_H} \binom{N-a_H}{k} p_n^k q_n^{N-a_H-k} \\ &= p_n^{a_H} \end{aligned}$$

Donc la variable X_H suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n^{a_H}$, ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_H) = p_n^{a_H}}$.

18 ▷

- L'ensemble \mathcal{C}_0 des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ s'écrit

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{\substack{S \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |S|=s_0}} \{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S, A_H)\}$$

on a $\text{Card}\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S, A_H)\} = c_0$ donc

$$\boxed{|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0}$$

- On sait qu'un graphe $H = (S'_0, A_H)$ est une copie de G_0 s'il existe une bijection σ de S'_0 telle que

$$\forall (s, t) \in S'_0 \times S'_0 \quad \{s, t\} \in A_H \iff \{\sigma(s), \sigma(t)\} \in A_{G_0}$$

ainsi l'application de $\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S'_0, A_H)\}$ vers l'ensemble des bijections σ de S'_0 , qui à H associe σ est surjective, donc $\text{Card}\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S'_0, A_H)\} = c_0 \leq s_0!$.

On en déduit que

$$|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0 = \frac{n(n-1)\dots(n-s_0+1)}{s_0!} c_0 \leq n^{s_0}$$

19 ▷ On a pour tout $G \in \Omega_n$, $X_n^0(G)$ est le nombre de copies de G_0 contenues dans G et $X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc

$$X_n^0 = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$$

et

$$\mathbb{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbb{E}(X_H)$$

d'après la question 17) $\mathbb{E}(X_H) = \mathbb{P}(X_H = 1) = \mathbb{P}(H \subset G)$ par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^0) &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G) \\ &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{a_H} \\ &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{a_0} \\ &= p_n^{a_0} |\mathcal{C}_0| \end{aligned}$$

la question 17) donne alors

$$\mathbb{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}$$

20 ▷ Puisque l'ensemble $\{H \subset G_0 \mid a_H \geq 1\}$ est fini alors la valeur $\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}$ existe et elle est atteinte en un

$H_0 \subset G_0$, donc $\omega_0 = \frac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$.

• Définissons sur \mathcal{E}_n , la variable aléatoire réelle discrète Y_n telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $Y_n(G)$ est le nombre de copies de H_0 contenues dans G . Les variables Y_n et X_n^0 se comportent de la même manière vu qu'on a changé G_0 par H_0 .

Puisque $H_0 \subset G_0$ alors toute copie de G_0 contient au moins une copie de H_0 , par conséquent on a $X_n^0 \leq Y_n$. L'inégalité démontrée dans la question 19) et la croissance de l'espérance donne :

$$\mathbb{E}(X_n^0) \leq \mathbb{E}(Y_n) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}$$

On a $p_n = o\left(\frac{1}{n^{\omega_0}}\right)$ donc

$$n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = o\left(n^{s_{H_0} - \omega_0 a_{H_0}}\right) = o(1)$$

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n^0) = 0$.

• Ecrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n^0 > 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n^0 = k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{E}(X_n^0 = k) \\ &\leq \mathbb{E}(X_n^0) \end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

21 ▷ On a $X_n^0 = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$ donc

$$(X_n^0)^2 = \sum_{H, H' \in \mathcal{C}_0} X_H X_{H'}$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{H, H' \in \mathcal{C}_0} \mathbb{E}(X_H X_{H'})$$

$X_H X_{H'}$ suit aussi une loi de Bernoulli et

$$\begin{aligned} [X_H X_{H'} = 1] &= [X_H = 1] \cap [X_{H'} = 1] \\ &= \{G \in \Omega_n \mid H \subset G\} \cap \{G \in \Omega_n \mid H' \subset G\} \\ &= \{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\} \\ &= [X_{H \cup H'} = 1] \end{aligned}$$

d'après la question 17)

$$\mathbb{P}(X_H X_{H'} = 1) = \mathbb{P}(X_{H \cup H'} = 1) = p_n^{a_{H \cup H'}}$$

Par définition $a_{H \cup H'} = |A_H \cup A_{H'}|$ donc

$$a_{H \cup H'} = |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}| = a_H + a_{H'} - a_{H \cap H'}$$

comme H et H' sont dans \mathcal{C}_0 alors $a_H = a_{H'} = a_0$, d'où $a_{H \cup H'} = 2a_0 - a_{H \cap H'}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(X_{H \cup H'} = 1) = \mathbb{P}(H \cup H' \subset G) = p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$, ainsi

$$\mathbb{E} \left((X_n^0)^2 \right) = \sum_{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbb{P}(H \cup H' \subset G) = \sum_{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

22 ▷ On a

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2 \\ s_{H \cap H'} = 0}} \mathbb{P}(H \cup H' \subset G) = \sum_{\substack{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2 \\ s_{H \cap H'} = 0}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

remarquons que $s_{H \cap H'} = 0 \Leftrightarrow a_{H \cap H'} = 0 \Leftrightarrow H \cap H' = \emptyset$, donc

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2 \\ s_{H \cap H'} = 0}} p_n^{2a_0} \leq p_n^{2a_0} |\mathcal{C}_0|^2$$

dans la question 19) on a établi que $\mathbb{E}(X_n^0) = p_n^{a_0} |\mathcal{C}_0|$ d'où l'on a $\Sigma_0 \leq (\mathbb{E}(X_n^0))^2$.

23 ▷ Soit $k \in \llbracket 1, s_0 \rrbracket$; on a

$$\Sigma_k = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \sum_{\substack{H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

Remarquons que dans la deuxième somme les $a_{H \cap H'}$ ne sont pas forcément constants !.

Par définition de ω_0 on a

$$\forall H' \in \Omega_H \quad a_{H \cap H'} \leq \frac{s_{H \cap H'}}{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0}$$

puisque $p_n \in]0, 1[$ alors

$$\forall H' \in \Omega_H \quad p_n^{-a_{H \cap H'}} \leq p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \Sigma_k &\leq \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \left(\sum_{\substack{H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} 1 \right) \\ &\leq \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid s_{H \cap H'} = k \} \\ &\leq \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k \} \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathcal{P}_{s_0}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, posons $F_A = \{ B \in \mathcal{P}_{s_0}(\llbracket 1, n \rrbracket) \mid |A \cap B| = k \}$.

On a la partition

$$\{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k \} = \bigcup_{B \in F_{S_H}} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B \}$$

donc

$$\text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k \} = \sum_{B \in F_{S_H}} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B \}$$

d'après la question 18) on a $\text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B \} = c_0$, ce qui donne

$$\text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k \} = c_0 \text{Card}(F_{S_H})$$

Remarquons que

$$B \in F_A \Leftrightarrow \exists!(C, D) \in \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A) \text{ tel que } B = C \cup D$$

ce qui définit une bijection entre F_A et $\mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A)$, donc

$$\text{Card} F_A = \text{Card}(\mathcal{P}_k(A)) \text{Card}(\mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A)) = \binom{s_0}{k} \binom{n - s_0}{s_0 - k}$$

on en déduit

$$\text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k \} = \binom{s_0}{k} \binom{n - s_0}{s_0 - k} c_0$$

ainsi

$$\Sigma_k \leq \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \quad (1)$$

24 ▷ On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$.

- On a pour tout q et r vérifiant $1 \leq q \leq r$

$$\binom{r}{q} r^{-q} = \frac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{q!} r^{-q} = \frac{1}{q!} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{2}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{q-1}{r}\right)$$

pour tout $k \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$ $\left(1 - \frac{2}{r}\right) \geq \left(1 - \frac{q-1}{r}\right)$ donc

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geq \frac{1}{q!} \left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q \quad (2)$$

- La formule (1) de la question 23) s'écrit en fait

$$\Sigma_k \leq |\mathcal{C}_0| \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

On sait que $\mathbb{E}(X_n^0) = p_n^{a_0} |\mathcal{C}_0|$ et $|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0$ donc

$$\begin{aligned} \Sigma_k &\leq (\mathbb{E}(X_n^0))^2 \frac{1}{|\mathcal{C}_0|} c_0 \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\ &\leq (\mathbb{E}(X_n^0))^2 \frac{\binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \end{aligned}$$

puisque $\binom{n-s_0}{s_0-k} \leq \frac{(n-s_0)^{s_0-k}}{k!} \leq \frac{n^{s_0-k}}{k!}$ alors

$$\frac{\binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} \leq \binom{s_0}{k} \frac{k!}{\binom{n}{s_0} n^{k-s_0}}$$

l'inégalité (2) donne $\frac{1}{\binom{n}{s_0} n^{k-s_0}} \leq \frac{1}{n^k} s_0! \left(1 - \frac{s_0-1}{s_0}\right)^{-s_0}$ donc

$$\frac{\binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} \leq \underbrace{\left(k! \binom{s_0}{k} s_0! \left(1 - \frac{s_0-1}{s_0}\right)^{-s_0} \right)}_C \frac{1}{n^k}$$

ainsi il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Sigma_k \leq (\mathbb{E}(X_n^0))^2 \frac{C}{(n^{\omega_0} p_n)^{\frac{k}{\omega_0}}}$$

Par hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$ donc $\Sigma_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left((\mathbb{E}(X_n^0))^2\right)$.

25 ▷

- La formule de Koenig-Huygens donne $\frac{\mathbb{V}(X_n^0)}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} = \frac{\mathbb{E}\left((X_n^0)^2\right)}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} - 1$.

D'après la question 21) on a

$$\mathbb{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{(H, H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbb{P}(H \cup H' \subset G) = \sum_{k=0}^{s_0} \Sigma_k$$

donc

$$\frac{\mathbb{V}(X_n^0)}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} = \frac{\Sigma_0}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} + \frac{\sum_{k=1}^{s_0} \Sigma_k}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} - 1 \quad (1)$$

D'après la question 24) on a $\frac{\sum_{k=1}^{s_0} \Sigma_k}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2)$.

- Calculons Σ_0 :

On suit la démarche des questions 22) et 23) , on a $s_{H \cap H'} = 0 \Leftrightarrow a_{H \cap H'} = 0 \Leftrightarrow H \cap H' = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0} \left(\sum_{\substack{H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = 0}} 1 \right) \\ &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid s_{H \cap H'} = 0 \} \\ &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_H \cap S_{H'} = \emptyset \} \\ &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{2a_0} \text{Card} \{ H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} \in \mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H}) = \emptyset \} \end{aligned}$$

On a la partition

$$\{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_H \cap S_{H'} = \emptyset\} = \bigcup_{B \in \mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})} \{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B\}$$

donc

$$\text{Card} \{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_H \cap S_{H'} = \emptyset\} = \sum_{B \in \mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})} \text{Card} \{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B\}$$

d'après la question 18) on a $\text{Card} \{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_{H'} = B\} = c_0$, ce qui donne

$$\text{Card} \{H' \in \mathcal{C}_0 \mid S_H \cap S_{H'} = \emptyset\} = c_0 \text{Card} (\mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})) = c_0 \binom{n-s_0}{s_0}$$

on en déduit

$$\Sigma_0 = c_0 |\mathcal{C}_0| p_n^{2a_0} \binom{n-s_0}{s_0} = (c_0)^2 \binom{n}{s_0} \binom{n-s_0}{s_0} p_n^{2a_0}$$

Bien sûr si $\frac{n}{2} < s_0$ alors $\Sigma_0 = 0$, mais dans notre cas on fait tendre n vers $+\infty$ et s_0 est fixe, on prend donc n assez grand ($n > 2s_0$) par suite $\Sigma_0 > 0$.

- Ce résultat permet d'écrire

$$\frac{\Sigma_0}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} = \frac{(c_0)^2 \binom{n}{s_0} \binom{n-s_0}{s_0} p_n^{2a_0}}{\left(c_0 \binom{n}{s_0} p_n^{a_0} \right)^2} = \frac{\binom{n-s_0}{s_0}}{\binom{n}{s_0}}$$

comme $\binom{n}{s_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{s_0}}{s_0!}$ et $\binom{n-s_0}{s_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n-s_0)^{s_0}}{s_0!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{s_0}}{s_0!}$ alors on a $\frac{\Sigma_0}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (3)$.

- Finalement les relations (1) , (2) et (3) donnent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n^0)}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} = 0$.

26 ▷ D'après la question 12) on a $\mathbb{P}(X_n^0 = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n^0)}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2}$ donc $\mathbb{P}(X_n^0 = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par suite

$$\mathbb{P}(X_n^0 > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n^0 = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi on a :

- Si $n^{-\omega_0} = o(p_n)$ (c.a.d $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$) alors $\mathbb{P}(X_n^0 > 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- Si $p_n = o(n^{-\omega_0})$ d'après la question 20) on a $\mathbb{P}(X_n^0 > 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite $(k^{-\omega_0})_{k \geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété \mathcal{P}_n .

27 ▷

• Soit G_0 le graphe formé de deux sommets et une arête. Dans ce cas, les variables A_n et X_n^0 sont identiques et le seul graphe $H \subset G_0$ qui contient au moins une arête est G_0 lui même et par suite $\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H} = 2$.

On retrouve ainsi le résultat de la question 16.

- Si G_0 est une étoile à $d \geq 1$ branches , soit H un graphe contenu dans G_0 , on a deux cas :
 - H ne contient pas le centre s de G_0 donc il est a sommets isolés et $a_H = 0$.
 - H contient le centre s de G_0 donc il est une étoile à k branches avec $k \in \llbracket 2, d \rrbracket$ donc $a_H = k - 1$, $s_H = k$.

Ainsi

$$\omega_0 = \min_{2 \leq k \leq d} \frac{k}{k-1} = \frac{d}{d-1}$$

et la suite $(k^{-\frac{d}{d-1}})_{k \geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

- FIN -