PROBLÈME D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

A - Étude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

A - 1) $\boxed{\text{Un vecteur normal de } \mathcal{P}_m \text{ est } \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}}$ $\boxed{\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u} \text{ où } A(1,0,0) \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Si $x = 1$ et $y = z$ alors $x + my - mz = 1$ donc $\boxed{\text{tous les plans } \mathcal{P}_m \text{ contiennent la droite } \mathcal{D}.}$

A - 2) $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} 2m \\ -1-m \\ 1-m \end{pmatrix}$. $\vec{r}_m \neq 0$ donc $\vec{a}$ n'est pas colinéaire à la normale à P_m donc $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$. Le plan R_m contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$ passe par $O \in \mathcal{D}'$ et sa direction est engendrée par $(\vec{a}, \vec{n}_m)$ donc R_m est orthogonal à r_m donc

$\boxed{\text{une équation cartésienne de } R_m \text{ est } 2mx - (1+m)y + (1-m)z = 0.}$

A - 3) les coordonnées de I_m vérifie $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + my - mz = 1 \\ 2mx - (1+m)y + (1-m)z = 0 \end{cases}$, on trouve après calculs $\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}, -\frac{m}{1+m^2}\right)$.

A - 4) (S) est une sphère et l'équation se met sous la forme : $(x - 1/2)^2 + y^2 + z^2 = 1/4$,

$\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(\tfrac{1}{2}, 0, 0) \text{ et de rayon } 1/2.}$

A - 5) On vérifie que I_m appartient à (S) et comme I_m et Ω appartiennent aussi à Q :

$\boxed{I_m \text{ appartient au cercle du plan } Q \text{ de centre } \Omega \text{ et de rayon } 1/2.}$

A - 6) Pour (x, y, z) donné étudions l'équation d'inconnue m : $(y - z)m = 1 - x$

Il y a une et une seule solution en m ssi $y \neq z$. $\boxed{F = \mathcal{E} \setminus P \text{ où } P \text{ est le plan d'équation } y = z.}$

Il y a au moins une solution en m ssi $y \neq z$ ou ($y = z$ et $x = 1$) ssi $(x, y, z) \in F \cup \mathcal{D}$:

$\boxed{\bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{P}_m = F \cup \mathcal{D}}$

B - Étude d'un exemple d'application f

$$f(x,y,z) = 3(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B - 1) On trouve $\boxed{f(x,y,z) = (4y + 2z, 2x - 2z, 4x + 8y).}$

B - 2) $f(x,y,z) = 0 \iff z = -2y, x = z = -2y$ Le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

f n'est pas injectif donc n'est pas un automorphisme de E.

B - 3) D'après le théorème du rang (voir cours !) on a ici $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker(f) = 3 - 1 = 2.}$

B - 4) Il me semble que c'est du cours... En bref, la famille étant génératrice :

$\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ f(\vec{X}), \vec{X} \in G \right\} = \{ f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

Puis f étant linéaire $\mathrm{Im}(\varphi) = \{ xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \} = \mathrm{Vect}(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_3))$

B - 5) L'image de f est un plan engendré par $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments :

$f(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(\vec{j}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ ces deux vecteurs indépendants forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

B - 6) $(f(f(\vec{i})) = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(f(f(\vec{i})), f(\vec{i}), \vec{i}\right) = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = -64 \neq 0$

Donc $\boxed{\mathcal{B}' = \left(f(f(\vec{i})), f(\vec{i}), \vec{i}\right) \text{ est une base de } E.}$

On peut remarquer que $f(f(\vec{i})) = -8 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(f(f(\vec{i}))) = 0$ (au pire on fait le calcul...) donc $\boxed{\text{la matrice } A' \text{ de } f \text{ dans } \mathcal{B}' \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

B - 7) On a vu au B-6) que $\boxed{P = P_1}$ et d'après le cours $\boxed{A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP}$.

C - Étude d'un deuxième exemple

C - 1) En posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ on a la relation au rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe a_n et b_n tels que $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. On calcule $M^{n+1} = MM^n = \begin{pmatrix} 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n \end{pmatrix}$, donc en posant $\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = -3a_n - b_n \end{cases}}$, on a la propriété au rang $n+1$ et on conclut par récurrence...

C - 2) On vérifie que pour tout entier naturel n, $b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.

C - 3) L'équation caractéristique est $q^2 - q - 20 = 0$ qui a pour solutions -4 et 5. Donc $b_n = \alpha(-4)^n + \beta 5^n$. On détermine les constantes avec $b_0 = 0, b_1 = -3$, on trouve $\boxed{b_n = \frac{1}{3}((-4)^n - 5^n)}$. Puis $a_n = -\frac{1}{3}(b_n + b_{n+1})$, on trouve $\boxed{a_n = \frac{1}{3}((-4)^n + 2 \cdot 5^n)}$.

C - 4) $a_2 = 22, b_2 = -3$, $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -3 \\ -3 & 22 & -3 \\ -3 & -3 & 22 \end{pmatrix} = M + 20I_3$. $\boxed{M^2 = M + 20I_3}$

Donc $M(\frac{1}{20}(M - I_3)) = I_3$ donc M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{20}(M - I_3) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$.

D - Étude d'un troisième cas

D - 1) $g \circ g(\vec{X}) = \alpha(\vec{X} \cdot \vec{u})\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})g(\vec{X})$.
Si $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$ alors $g \circ g = g$ donc g est un projecteur.
Si g est un projecteur, alors pour tout $\vec{X}$, $g(\vec{X}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})g(\vec{X})$, en particulier pour $\vec{X} = \vec{u}$ or $g(\vec{u}) = \alpha||\vec{u}||^2\vec{v} \neq \vec{0}$ donc on obtient $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$.

D - 2) Si $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$ alors g est un projecteur donc d'après le cours : $\mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}g = E$.
Or on a facilement $F_1 = \mathrm{Ker}g$, $\mathrm{Im}g \subset F_2 = \mathbb{R}\vec{v}$. D'autre part $g(\vec{u}) \neq 0$ donc $\mathrm{Im}f = F_2$. Donc $\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires dans } E \text{ et } g \text{ est la projection sur } F_2 = \mathbb{R}\vec{v} \text{ parallèlement à } F_1 = \vec{u}^\perp}$.

Remarque : Cela ne semble pas être la démonstration attendue... mais autant utiliser le cours, non ?

D - 3) $P = \vec{u}^{\perp}$ où $\vec{u} = (1,1,1)$ et $D = \mathbb{R}\vec{v}$ où $\vec{v} = (-5,1,1)$. $(\vec{u}\cdot\vec{v}) = -3$. On sait donc que $g : \vec{X} \mapsto -\dfrac{1}{3}(\vec{X}\cdot\vec{u})\vec{v}$ est la projection sur D parallèlement à P donc $p = Id_E - g$.

$p(\vec{i}) = \vec{i} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{3}(-2,1,1), p(\vec{j}) = \frac{1}{3}(-5,4,1), p(\vec{k}) = \frac{1}{3}(-5,1,4)$. $\quad \Pi_{\mathcal{B}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Étude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) L'ensemble de définition D de f est $\boxed{[0,1[\cup]1,+\infty[}$.

A - 2) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{\ln(x)} \to_{x\to 0^+} 0$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

A - 3) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ (quotient).

On a $f'(0) = 0$ et pour $x > 0$ (et $x \neq 1$) : $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x)^2}$.

Donc $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$. f' est continue en 0.

Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$.

A - 4) $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$ est négative sur $]0,1[\cup]1,\mathrm{e}]$ puis positive.

f est décroissante sur $]0,1[$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

f est décroissante sur $]1,\mathrm{e}[$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, puis f est croissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

B - Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) On a vu que si $x \geqslant \mathrm{e}$ alors $f(x) \geqslant f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ (autrement dit l'intervalle $[\mathrm{e},+\infty[$ est stable par f). Comme $v_0 \geqslant \mathrm{e}$, $\boxed{\text{on montre par récurrence que pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}.}$

B - 2) $v_n > 0$ et $v_{n+1}/v_n = 1/\ln(v_n) \leqslant 1$ d'après B1). Donc la suite est $\boxed{\text{décroissante, minorée}}$ par e donc la suite v converge et sa limite ℓ supérieure (ou égale) à e.

De plus f est continue sur D donc $\boxed{\ell \text{ est un point fixe de } f}$ or :

$f(x) = x \iff \dfrac{x}{\ln(x)} = x \iff x = 0$ ou $\ln x = 1 \iff x = 0$ ou $x = \mathrm{e}$.

Donc $\boxed{\lim v = \mathrm{e}}$.

B - 3) On a vu $f' \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e},+\infty[$. De plus $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x\ln(x)^3}$ est positive sur $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ puis positive donc f' admet un maximum en $x = \mathrm{e}^2$. $f'(\mathrm{e}^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant \mathrm{e}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}.}$

Remarque : on peut aussi remarquer que $\frac{1}{4} - f'(x) = \frac{\ln(x)^2 - 4\ln(x)+4}{4\ln(x)^2} = \frac{(\ln(x)-2)^2}{4\ln(x)^2} \geqslant 0$.

B - 4) inégalité des accroissements finis : Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe des constantes m, M telles que $m \leqslant f' \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

B - 5) D'après 3) et 4), on obtient avec $a=\mathrm{e}, b=v_n$: $0 \leqslant f(v_n)-f(\mathrm{e}) = v_{n+1}-\mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4}(v_n-\mathrm{e})$ donc par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_n-\mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|v_0-\mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|3-\mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

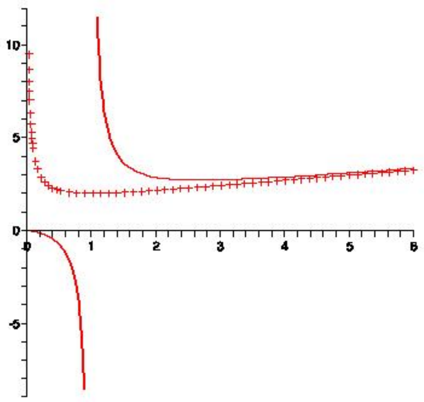
B - 6) Sachant que $4^5 > 1000 = 10^3$, on a $4^{20} > 10^{12}$ donc à partir de $\boxed{n_1 = 20}$ on a v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.
Remarque : Avec Maple `v:=3.0:for k from 1 to 20 do v:=f(v) od:v;` donne :
$v_{20} \approx 2.7182818284590$.

C - Étude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x\ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D\setminus\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.
On cherche le signe de h : $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{x(1+x^2)^2} \geqslant 0$.
Comme de plus $h(1)=0$, on a h (et donc g' aussi) est négative sur $]0,1[$ et positive sur $]1,+\infty[$:
$\boxed{g \text{ est décroissante sur }]0,1[\text{ et croissante sur }]1,+\infty[}$

C - 2) $g(x) = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{x-1}{\ln(x)} \to_{x\to1} 2\cdot 1$, $\boxed{\lim\limits_{1} g = 2}$

C - 3) $g(x)-f(x) = -\frac{1}{x\ln(x)}$, la courbe représentative de g est au dessus de celle de f pour $x\in]0,1[$ puis elle est au dessous de celle de f pour $x>1$.



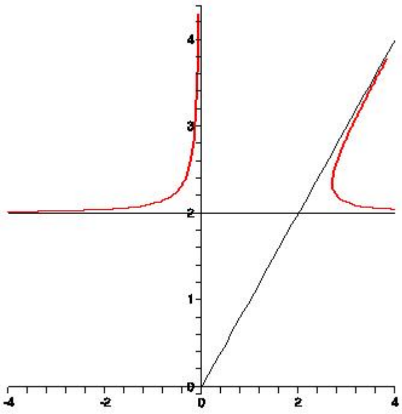
$$\int_2^{\mathrm{e}} f(x)-g(x)\mathrm{d}x = \int_2^{\mathrm{e}} f(x)-g(x)\mathrm{d}x = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^{\mathrm{e}} = -\ln(\ln(2))$$

$\boxed{\text{L'aire demandée vaut } -\ln(\ln(2)).}$ (Remarque : $-\ln(\ln(2)) > 0$.)

D - Tracé d'une courbe paramétrée

D - 1) Asymptotes de (Γ) :
Quand $t\to 0^+$, $x(t) = f(t) \to 0^-$ et $y(t) = g(t) \to +\infty$: $\boxed{\text{asymptote verticale } x=0}$ (avec Γ dans le quart de plan $x<0, y>0$)
Quand $t\to 1^+$ (resp. 1^-), $x\to+\infty$ (resp. $-\infty$) et $y\to 2^+$: $\boxed{\text{asymptote horizontale } y=2}$ (avec Γ au dessus).
Quand $t\to+\infty, x\to+\infty, y\to+\infty, y(t)/x(t) = \frac{t^2-1}{t^2} \to 1$ puis $y(t)-1x(t) = -\frac{1}{t\ln(t)} \to 0^-$:
$\boxed{\text{asymptote oblique } y=x \text{ avec } \Gamma \text{ dans le demi-plan } y\leqslant x \text{ donc au dessous.}}$

D - 2) En $t = \mathrm{e}$, on a $x'(\mathrm{e}) = 0$ et $g'(\mathrm{e}) \neq 0$ donc une tangente verticale au point $A = (f(\mathrm{e}), g(\mathrm{e})) = (\mathrm{e}, \mathrm{e} - 1/\mathrm{e})$.



E - Solutions d'une équation différentielle

E - 1) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. On a $y'(x) = -z'(x)/z(x)^2 = \frac{z^2(x) - xz(x)}{x^2 z^2(x)}$ donc y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $\boxed{(E_2) : y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{x^2}.}$

E - 2) Les solutions de l'équation $y' + \frac{1}{x} y = 0$ sont du type $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x}$. On peut chercher une solution particulière par la variation de la constante ou deviner d'après l'énoncé et vérifier que $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ convient. En écrivant $\alpha = \ln(a)$ on a bien : $\boxed{\text{les solutions de } (E_2) \text{ sont les } g_a : x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}.}$
Effectivement, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K (car $ax > 1$ pour $x > 1$...). On a donc ainsi $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

E - 3 Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$.
Remarquons que $\dfrac{x}{\ln(ax)} = \dfrac{1}{a} \dfrac{ax}{\ln(ax)}$ et comme $x = \dfrac{1}{a} ax$: le point $(x, f_a(x))$ de (C_a) est dont l'image du point $(ax, f_1(ax)) \in C_1$ par $h_{O,1/a} : (x, y) \mapsto (x/a, y/a)$ et la réciproque est vraie (l'image de C_1 par $h_{O,1/a}$ est incluse dans C_a) :
$\boxed{(C_a) \text{ est l'image de } (C_1) \text{ par une homothétie de centre } O \text{ de rapport } \frac{1}{a}.}$

F - Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

F - 1) f est continue sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. D'après le théorème fondamental $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[0, 1[$ au moins.
Remarque pour les math-spé : Pour $x \geqslant 1$, $F(x)$ existe ssi l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge or $-f(t) \sim_{t \to 1^-} \frac{1}{(1-t)^1}$ or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$ diverge.
F est définie sur $[0, 1[$ et l'ensemble de définition de H est $\boxed{]0,1[}$.

F - 2) Pour $x > 0$, $H(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \to F'(0) = f(0)$. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 0}$

F - 3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-0}{x-1}=\ln'(1)=1$ or $1/2<1<3/2$ donc il existe un réel a dans $]0,1]$ tel que pour $x\in[a,1[$ $1/2\leqslant\dfrac{\ln(x)}{x-1}\leqslant 3/2$ puis puisque $x-1<0$ on a $\dfrac{3}{2}(x-1)\leqslant\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(x-1)$.
Remarque : on peut aussi étudier les fonctions différences $f(x)-\alpha(x-1)$...
Donc pour $a\leqslant t\leqslant x<1$, $2\dfrac{t}{t-1}\leqslant f(t)\leqslant\dfrac{3}{2}\dfrac{t}{t-1}$.
Or $\displaystyle\int_a^x\frac{t}{t-1}\mathrm{d}t=\int_a^x 1+\frac{1}{t-1}\mathrm{d}t=x-a+[\ln|t-1|]_a^x\to_{x\to 1^-}-\infty$.
Donc $\lim_{1^-}F=-\infty$ et $\boxed{\lim_{1^-}H=-\infty}$.
Remarque : C'est plus simple avec le cours de spé sur les intégrales impropres.