

Corrigé Centrale 2000 - (Maths I - PSI)

François Jaboeuf - PSI* - Joffre-MONTPELLIER

21 avril 2001

PARTIE I

I.A) Question I.A) :

On reconnaît le lemme de Lebesgue dont la démonstration est ici simplifiée car f est C^1 : une intégration par parties donne la conclusion cherchée :

$$\int_a^b f(t) \sin(xt) dt = [f(t) \left(\frac{-\cos(xt)}{x} \right)]_a^b + \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \cos(xt) dt = \frac{1}{x} \left(f(a) \cos(ax) - f(b) \cos(bx) + \int_a^b f'(t) \cos(xt) dt \right).$$

L'expression en facteur de $\frac{1}{x}$ dans le dernier membre est visiblement bornée par rapport à x . D'où le résultat :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0$$

I.B) Question I.B) :

I.B).1

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et même continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$ ($\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ et $\sin(nt) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} nt$). Ceci assure l'existence de l'intégrale "ordinaire" J_n .

I.B).2

On a clairement $J_0 = 0; J_1 = \frac{\pi}{2}; J_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 2$.

Puis la formule trigonométrique : $\sin(3t) = 3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)$ conduit à :

$$J_3 = 3 \frac{\pi}{2} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = 3 \frac{\pi}{2} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt \text{ et finalement } J_3 = \frac{\pi}{2}.$$

I.B).3

De $\sin(nt) - \sin((n-2)t) = 2 \cos((n-1)t) \sin(t)$, on tire pour $n \geq 2$:

$$J_n - J_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos((n-1)t) dt = \frac{2}{n-1} \sin((n-1) \frac{\pi}{2})$$

En considérant la parité de n on obtient : $\begin{cases} J_n - J_{n-2} = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ J_n - J_{n-2} = \frac{2}{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. Puis par récurrence immédiate :

$$\begin{cases} J_n = \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ J_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2}{2k-1} (-1)^{k-1} & \text{si } n \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

I.B).4

De $\sin(nt) - \sin((n-1)t) = 2 \cos((n-\frac{1}{2})t) \sin(\frac{t}{2})$, on tire pour $n \geq 1$: $J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n-\frac{1}{2})t) \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})} dt$. Et comme la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}$ est C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A s'applique (la démonstration de I.A est analogue en remplaçant $\sin(xt)$ par $\cos(xt)$ ou bien le changement de variable $t = \pi - u$ dans la dernière intégrale

remplace $\cos((n - \frac{1}{2})t)$ par $(-1)^{n+1} \sin((n - \frac{1}{2})u)$. En substituant à la variable x la suite $(x_n = n - \frac{1}{2})$ de limite $+\infty$ on a la limite cherchée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$.

D'où, puisque la suite (J_{2n-1}) est constante $(= \frac{\pi}{2})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_{2n} = \frac{\pi}{2})$ et compte tenu des résultats du I.B.3), après glissement de l'indice k de 1, on retrouve la formule demandée (habituellement déduite du développement en série entière de la fonction Atan) :

$$4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi$$

I.C) Question I.C) :

I.C).1

la fonction $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue en tout point non multiple de π et continue par morceaux sur $[0, a]$ puisque si $k\pi$ est l'un des multiples (en nombre fini) de π dans l'intervalle $[0, a]$, $\lim_{t \rightarrow k\pi} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = (-1)^{(n-1)k} n$
 $(\sin(u + k\pi)) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} (-1)^k u$ et $\sin(n(u + k\pi)) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} (-1)^{nk} nu$. Ceci assure l'existence de l'intégrale "ordinaire" demandée.

I.C).2

On sait déjà que f est C^∞ sur $]0, a]$ comme fraction en x et $\sin(x)$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Le problème à résoudre est donc le prolongement C^∞ en 0. Sachant que l'on a les développements en série entière : $\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ et $\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}$. Le numérateur $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ est donc prolongeable par 0 en 0 et ce prolongement, développable en série entière est C^∞ sur $\mathbb{R}$; de même le dénominateur $\frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement (par 1 en 0) qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Finalement comme on a posé $f(0) = 0$, f coïncide sur l'intervalle $[0, a]$ avec le quotient des deux prolongements C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, ni en 0 (il vaut 1), ni sur l'intervalle $]0, a]$ où il vaut $\frac{\sin(x)}{x}$ et f est bien C^∞ sur $[0, a]$.

I.C).3

Chacune des deux intégrales existant d'après I.C.1), on peut écrire :
 $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt = \int_0^a \sin(nt) f(t) dt$ où f est la fonction de la question précédente. Comme f est C^∞ sur $[0, a]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A. donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt \right) = 0$.

I.C).4

1er Cas : $a = \frac{\pi}{2}$ D'après I.B.4 et I.C.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

2ème Cas : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ Par la relation de Chasles : $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt$
et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[a, \frac{\pi}{2}]$), on obtient la même limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

3ème Cas : $a > \frac{\pi}{2}$ De même $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{\sin(nt)}{t} dt$ et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, a]$), on obtient la même limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

I.D) Question I.D) :

$F(n\pi) = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nu)}{u} du$ (par le changement de variable affine $t = nu$) et d'après I.C.4),
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\pi) = \frac{\pi}{2}$. Pour $x \rightarrow +\infty$, soit $n = E(\frac{x}{\pi}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (car $n > \frac{x}{\pi} - 1$) de telle sorte que par la relation de Chasles :
 $F(x) = F(n\pi) + \int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = 0$ puisqu'on a la majoration
 $|\int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt| \leq \int_{n\pi}^x \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{1}{n\pi}$ (car $|\frac{\sin t}{t}| \leq \frac{1}{n\pi}$ sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$).
D'où la limite cherchée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

I.E) Question I.E) :

L'application $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est C^0 par morceaux sur $[0, +\infty[$; elle est intégrable sur cet intervalle si, et seulement si, $t \mapsto |\frac{\sin t}{t}|$ l'est, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt$ existe. Or par la relation de Chasles on peut écrire : $\int_0^{n\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+k\pi} du$ (par les changements de variable affines : $t = u+k\pi$ et positivité de $\frac{\sin u}{u+k\pi}$ sur $[0, \pi]$). Mais la série de terme général positif $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u+k\pi} du$ est divergente puisqu'on a la minoration : $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u+k\pi} du \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin u du = \frac{2}{(k+1)\pi}$. D'où la conclusion demandée :

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t} \text{ n'est pas intégrable sur }]0, +\infty[.$$

PARTIE II

II.A) Question II.A) :

L'application $t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est C^0 par morceaux sur $[0, +\infty[$ (cf. I.C.); elle est intégrable sur cet intervalle car dominée, quand $t \rightarrow +\infty$, par $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ avec $n \geq 2$.

II.B) Question II.B) :

Intégrons I_2 par parties après nous être assurés que la partie intégrée est bien convergente :
 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt$, et $\left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_0^{+\infty} = 0$ puisque $\frac{-1}{t}(\sin t)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$ et $\frac{-1}{t}(\sin t)^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t}\right)$. Puis par le changement de variable affine $t = \frac{u}{2}$, on obtient : $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = I_1$.

II.C) Question II.C) :

Sur $[0, \pi]$, $\sin$ est strictement concave donc son graphe est strictement en dessous de la tangente en 0 ($y=t$) pour $\pi \geq t > 0$ et pour $t > \pi$ on a clairement $|\sin t| \leq 1 < \pi < t$. Et compte-tenu de la parité du sinus : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{\sin t}{t}| < 1$. La suite de fonctions $\left(t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right)_{n \geq 2}$, C^0 et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } 1 < t \end{cases}$ qui est visiblement C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n = 0$ et le théorème de convergence dominée s'applique : on peut permuter l'intégrale et la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

II.D) Question II.D) :

Par stricte positivité des intégrales des fonctions continues, on a clairement $I_n > 0$ pour n pair. On a vu que $I_1 = \frac{\pi}{2} > 0$ et pour n impair ≥ 3 , d'après II.A) on peut écrire :

$$I_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt \text{ (relation de Chasles)}$$

et comme au I.E) par les changements affines de variable : $t = u + k\pi$,

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi (-1)^{nk} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du \text{ (n impair)}.$$

Or la suite $\left(\int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante (car c'est le cas de la suite $\left(\left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n\right)_{k \in \mathbb{N}}$) et de limite nulle (car $0 < \int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du \leq \int_0^\pi \left(\frac{1}{k\pi}\right)^n du = \frac{1}{\pi^{n-1}k^n}$). La série précédente dont la somme est I_n est alternée et relève de la règle de Leibniz. Non seulement elle converge (ce qu'on savait déjà) mais sa somme I_n est du signe du premier terme : $\int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u}\right)^n du > 0$. Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n > 0$.

PARTIE III

III.A) Question III.A) :

Calculons les premiers termes :

$$g_n^{(0)}(t) = (\sin t)^n; \quad g_n^{(1)}(t) = n \cos t (\sin t)^{n-1};$$

$$g_n^{(2)}(t) = n(\sin t)^{n-2} ((n-1)(\cos t)^2 - (\sin t)^2) = n(\sin t)^{n-2} (n(\cos t)^2 - 1).$$

Supposons par récurrence sur k ($k \leq n-1$) qu'il existe un polynôme P_k tel que

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_{n,k}(t) = (\sin t)^{n-k} P_k(\cos t)$, alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*, g_{n,k+1}(t) &= (n-k)(\cos t)P_k(\cos t) (\sin t)^{n-k-1} - (\sin t)^{n-k+1} P'_k(\cos t) \\ &= (\sin t)^{n-k-1} [(n-k)(\cos t)P_k(\cos t) - (1 - (\cos t)^2)P'_k(\cos t)] \end{aligned}$$

Ainsi la suite de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par :

$P_0 = 1$; $P_1 = nX$; $\forall k \in [0, n-1]$, $P_{k+1} = (n-k)XP_k - (1 - X^2)P'_k$ convient.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $h_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k} P_k(\cos t)$, et les fonctions $(h_{n,k})_{0 \leq k \leq n-2}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (cf. I.C.2 pour le problème en 0) et sont dominées par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (car $P_k(\cos t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $k \leq n-2$), donc intégrables en $+\infty$.

III.B) Question III.B) :

Pour $n = 2$, il n'y a qu'une seule valeur possible pour k ($k=0$) et pour $n > 2$ et $0 \leq k \leq n-3$, opérons une intégration par parties dont la partie intégrée converge :

$$(n-k-1)! \int_0^{+\infty} t^{k-n} g_n^{(k)}(t) dt = \left[-(n-k-2)! t^{k-n+1} g_n^{(k)}(t) \right]_0^{+\infty} + (n-k-2)! \int_0^{+\infty} t^{k+1-n} g_n^{(k+1)}(t) dt.$$

Mais d'après III.A), $t^{k-n+1} g_n^{(k)}(t) = t \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k} P_k(\cos t)$, donc : $t^{k-n+1} g_n^{(k)}(t) = \mathcal{O}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ et $t^{k-n+1} g_n^{(k)}(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (pour $k \leq n-3$, et même pour $k = n-2$ (cf III.C)) .

Finalement on a bien
$$(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt = (n-k-2)! \int_0^{+\infty} h_{n,k+1}(t) dt,$$
 ce qui prouve l'indépendance par rapport à k variant de 0 à $n-2$ de $(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t) dt$.

III.C) Question III.C) :

Pour $0 \leq k \leq n-2$, cela découle de l'intégrabilité établie III.A), et pour $k = n-1$, de la convergence de la partie intégrée de la question précédente (avec $k=n-2$) et de l'existence de l'intégrale du premier membre ; on obtient ainsi $\int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t) dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t) dt$, et donc compte-tenu du III.B :

$$\forall k \in \{0, \dots, (n-1)\}, (n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t) dt$$

III.D) Question III.D) :

De la définition de $h_{n,n-1}$, de I_n et de III.C) avec $k=0$ on déduit :

$$I_n = \int_0^{+\infty} h_{n,0}(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$$

III.E) Question III.E) :

III.E).1

Il s'agit de la linéarisation des puissances entières de $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$:

$$\begin{aligned} 4^p (\sin t)^{2p} &= (-1)^p (e^{it} - e^{-it})^{2p} = (-1)^p \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k e^{2(p-k)it} \\ &= (-1)^p \left((-1)^p C_{2p}^p + 2 \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cos(2(p-k)t) \right) \\ &\quad \text{(en isolant le terme réel où } k=p \text{ et en regroupant les termes conjugués associés à } k \text{ et } 2p-k) \\ &= \boxed{C_{2p}^p + 2 \sum_{k=1}^p (-1)^k C_{2p}^{p-k} \cos(2kt)} \quad \text{(en changeant } k \text{ en } p-k) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} 4^p (\sin t)^{2p+1} &= (-1)^p \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})^{2p+1} = (-1)^p \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k C_{2p+1}^k e^{(2(p-k)+1)it} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^k \sin((2(p-k)+1)t) \\ &\quad \text{(en regroupant les termes conjugués associés à } k \text{ et } 2p+1-k) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} \sin((2k+1)t)} \quad \text{(en changeant } k \text{ en } p-k) \end{aligned}$$

III.E).2

Sachant que

$$\frac{d^n}{dt^n} \cos(\alpha t) = \alpha^n \cos(\alpha t + n\frac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(\alpha t) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(\alpha t) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et que de même}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} (\sin(\alpha t)) = \alpha^n \sin(\alpha t + n\frac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(\alpha t) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(\alpha t) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} ,$$

on obtient compte-tenu de la question précédente :

$$\begin{cases} g_{2p}^{(2p-1)}(t) = \frac{2}{4^p} \sum_{k=1}^p (-1)^k C_{2p}^{p-k} (2k)^{2p-1} (-1)^p \sin(2kt) \\ g_{2p+1}^{(2p)}(t) = \frac{1}{4^p} \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} (2k+1)^{2p} (-1)^p \sin((2k+1)t) \end{cases} .$$

Puis d'après III.D, on obtient les formules suivantes où toutes les intégrales existent (on a même par changement de variable affine $u = kt$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = I_1$)

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{2}{4^p(2p-1)!} \sum_{k=1}^p (-1)^k C_{2p}^{p-k} (2k)^{2p-1} (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2kt)}{t} dt = \frac{1}{(2p-1)!} \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} C_{2p}^{p-k} k^{2p-1} I_1 \\ I_{2p+1} = \frac{1}{4^p(2p)!} \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} (2k+1)^{2p} (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{t} dt = \frac{1}{(2p)!} \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^{p-k} (k + \frac{1}{2})^{2p} I_1 \end{cases} .$$

Et puisque $I_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{1}{2(2p-1)!} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} C_{2p}^{p-k} k^{2p-1} \right) \pi \\ I_{2p+1} = \frac{1}{2(2p)!} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^{p-k} (k + \frac{1}{2})^{2p} \right) \pi \end{cases} . \text{ Les cas } p=1, p=2 \text{ donnent :}$$

$$I_2 = C_2^0 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad I_3 = \frac{\pi}{4} \left(-C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^0 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) = \frac{3\pi}{8}; \quad I_4 = \frac{\pi}{12} (-C_4^1 + C_4^0 2^3) = \frac{\pi}{3}$$

PARTIE IV

IV.A) Question IV.A) :

La fonction $t \mapsto \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{1}{t^2}$ donc intégrable en $+\infty$ et équivalente en 0 à $\frac{(tx)^n}{t^n} = x^n$, donc C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Finalement elle est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale proposée existe (même si $n=0$) .

IV.B) Question IV.B) :

Soit $n \geq 2$. L'application $\phi : (x, t) \mapsto \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$, par compositions et quotient de fonctions C^∞ , est C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et dominée par $\frac{|x|^n}{1+t^2}$ (puisque $|\sin(tx)| \leq |tx|$) et donc, si on se restreint à $0 \leq x \leq b$, avec $b > 0$, par $\frac{b^n}{1+t^2}$ fonction C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De même la dérivée partielle $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) = n \frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)}$ est C^0 sur $[0, b] \times \mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{nb^{n-1}}{1+t^2}$ qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin (cf les calculs du III.A), $(x, t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) = n \frac{[n(\cos tx)^2 - 1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)}$ est C^0 sur $[0, b] \times \mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{n(n+1)b^{n-2}}{1+t^2}$ (car $n-2 \geq 0$) qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il découle alors du théorème de dérivation sous l'intégrale avec hypothèses de domination que $x \mapsto A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)} dt$ est de classe C^2 sur tout segment $[0, b]$, ($b > 0$) et donc sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad A'_n(x) = \int_0^{+\infty} n \frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)} dt, \quad A''_n(x) = \int_0^{+\infty} n \frac{[n(\cos tx)^2 - 1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)} dt$$

Pour $n = 1$, la démonstration précédente s'applique pour la dérivée première mais pas pour la seconde (car $n-2 < 0$) ; en effet $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) = n \frac{-t \sin tx}{(1+t^2)}$ et la majoration précédente n'est plus valable ; A_1 sera déterminée au D) .

Pour $n = 0$, $A_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ est une constante.

Remarquons également que $A_n(x)$ existe pour tout réel x et qu'alors A_n à la parité de n .

Pour $n \geq 2$, et $x > 0$ nous avons donc :

$$\begin{aligned} A''_n(x) - n^2 A_n(x) - n(n-1) A_{n-2}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{nt^2[n(\cos tx)^2 - 1](\sin tx)^{n-2} - n^2(\sin tx)^n - n(n-1)t^2(\sin tx)^{n-2}}{t^n(1+t^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-n^2(t^2+1)(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n} dt \\ &= -n^2 x^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^n}{u^n} du \quad (\text{chgt de variable } t = \frac{u}{x}, \text{ avec } x > 0) \\ &= -n^2 x^{n-1} I_n \end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$, puisqu'alors le second membre ($\int_0^{+\infty} \frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n} dt$) est nul comme $n^2 x^{n-1} I_n$. A_n vérifie donc sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle (E_n) pour $n \geq 2$.

Remarquons que le signe de x intervient dans les bornes de l'intégrale lors du dernier changement de variable et que l'équation différentielle vérifiée par A_n sur $\mathbb{R}_-$ n'est pas exactement la même - il faudrait changer $-n^2 x^{n-1} I_n$ en $+n^2 x^{n-1} I_n$

IV.C) Question IV.C) :

IV.C).1

(E_2) s'écrit : $y'' - 4y = 2A_0(x) - 4xI_2 = \pi - 4xI_2$. Cherchons une solution particulière de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre binomial sous la forme d'un binôme $ax + b$ puisque 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 - 4r = 0$. $-4(ax + b) = \pi - 4xI_2$ est vérifiée pour $a = I_2$ et $b = -\frac{\pi}{4}$ et la solution générale de l'équation (E_2) s'écrit :

$$y = I_2x - \frac{\pi}{4} + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}.$$

IV.C).2

On sait que A_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+$ et caractérisée par les conditions initiales $A_2(0) = 0$ et $A_2'(0) = 0$ (cf calculs de IV.B) ; d'où les valeurs de α et β donnant A_2 sont les solutions du système : $\begin{cases} \alpha + \beta &= \frac{\pi}{4} \\ 2(\alpha - \beta) &= -I_2 \end{cases}$. Finalement on obtient $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2)$ et $\beta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}I_2)$ d'où sur $\mathbb{R}_+$:

$$A_2(x) = I_2x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2 \right) e^{2x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}I_2 \right) e^{-2x}$$

IV.C).3

D'après les dominations déjà rencontrées au IV.B) : $|A_2(x)| \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}x^2 = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$. Ainsi dans l'expression de $A_2(x)$ le coefficient $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I_2)$ de e^{2x} est nul sinon $A_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha e^{2x}$ ne saurait être dominé par x^2 . D'où :

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, A_2(x) = \frac{\pi}{4} (e^{-2x} + 2x - 1)$$

IV.D) Question IV.D) :

D'après les résultats du IV.A), dans le cas $n = 1$, on obtient : $A_1'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$ et pour $n = 2$: $A_2''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(2tx)}{1+t^2} dt = 2A_1'(2x) = \frac{d}{dx}(A_1(2x))$. D'où puisque $A_1(0) = 0 = A_2'(0)$ et compte-tenu du résultat de IV.C.3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, A_1(x) = A_2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-x})$$

IV.E) Question IV.E) :

Raisonnons de même qu'au IV.C.1) pour déterminer I_3 et A_3 :

1. (E_3) : $y'' - 9y = 6A_1(x) - 9x^2I_3 = 3\pi - 9x^2I_3 - 3\pi e^{-x}$ et l'équation caractéristique associée est $r^2 - 9 = 0$.
2. La fonction $I_3x^2 + \frac{2I_3-3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x}$ est une solution particulière de (E_3) .
3. La solution générale de (E_3) s'écrit donc : $y = I_3x^2 + \frac{2I_3-3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x} + \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x}$
4. Sur $\mathbb{R}_+$, A_3 est la solution de (E_3) qui vérifie les conditions initiales (cf calculs du IV.B) : $A_3(0) = A_3'(0) = 0$ ce qui conduit au système : $\begin{cases} \alpha + \beta &= -\frac{\pi}{24} - \frac{2I_3}{9} \\ \alpha - \beta &= \frac{\pi}{8} \end{cases}$. D'où $\alpha = \frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9}$, $\beta = -\frac{\pi}{12} - \frac{I_3}{9}$.
5. Ainsi on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+, A_3(x) = I_3x^2 + \frac{2I_3-3\pi}{9} + \frac{3\pi}{8}e^{-x} + \left(\frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9}\right)e^{3x} + \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{I_3}{9}\right)e^{-3x}$.
6. On a toujours la majoration : $|A_3(x)| \leq \frac{x^3\pi}{2} = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{24} - \frac{I_3}{9} = 0$
7. Finalement :

$$I_3 = \frac{3\pi}{8} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, A_3(x) = \frac{\pi}{8} (-e^{-3x} + 3e^{-x} + 3x^2 - 2)$$

IV.F) Question IV.F) :

La formule demandée avec les contraintes de degré et de parité est incorrecte (les cas $n=1, n=2, n=3 \dots$ en sont des contre-exemples). Il convient de supprimer le terme e^{-x} situé devant $Q_n(e^{-x})$.

Démontrons la formule ainsi corrigée ($A_n(x) = Q_n(e^{-x}) + R_n(x)$ avec $\deg(R_n) = n-1$, $\deg(Q_n) = n$, R_n et Q_n ayant les parités respectives de $n-1, n$) par récurrence sur n .

Pour $n=1$, d'après IV.D) $Q_1(X) = -\frac{\pi}{2}X$ et $R_1 = \frac{\pi}{2}$ conviennent.

Pour $n=2$, d'après IV.C) $Q_2(X) = \frac{\pi}{4}(X^2 - 1)$ et $R_2 = \frac{\pi}{2}X$ conviennent.

Pour $n=3$, d'après IV.E) $Q_3(X) = -\frac{\pi}{8}(X^3 - 3X)$ et $R_3 = \frac{\pi}{8}(3X^2 - 2)$ conviennent.

Mais la question sur le degré de Q_n est assez délicate et nécessite un traitement à part, voire des résultats intermédiaires à établir (cette difficulté a-t-elle été vraiment voulue par le concepteur du sujet ?). Nous procéderons donc en deux étapes :

1. Démonstration de la formule demandée mais avec la condition $\deg(Q_n) \leq n$ au lieu de $\deg(Q_n) = n$.
2. Calcul explicite de Q_n et mise en évidence que son degré est bien n .

1ère étape :

L'initialisation aux rangs $n=1, 2, 3$, a été vérifiée plus haut et remarquons que l'on peut l'étendre au rang $n=0$ en posant $A_0(x) = Q_0(e^{-x}) = \beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ et $R_0(x) = 0$.

Supposons maintenant que la propriété demandée (avec $\deg(Q_n) \leq n$) soit vérifiée au rang $n-2 \geq 0$ et écrivons $A_{n-2}(x) = Q_{n-2}(e^{-x}) + R_{n-2}(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k} e^{-kx} + R_{n-2}(x)$.

L'équation (E_n) s'écrit alors : $y'' - n^2 y = n(n-1) \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k} e^{-kx} + n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n$.

La technique de superposition des solutions nous permet de chercher une solution particulière sous la forme $P_n(e^{-x}) + R_n(x)$ où

1. $P_n(e^{-x}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2 - n^2} \beta_{n-2,k} e^{-kx}$ est solution de $y'' - n^2 y = n(n-1) \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k} e^{-kx}$
2. $R_n(x)$ solution de $y'' - n^2 y = n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n$.

Remarquons que ce dernier second membre est un polynôme en x de degré $(n-1)$ compte-tenu de l'hypothèse de récurrence et du fait que $I_n \neq 0$ (cf II.D).

Dans l'espace vectoriel de dimension finie n des polynômes de degré au plus $(n-1)$, l'application linéaire $y \mapsto y'' - n^2 y$ est un automorphisme (par exemple sa matrice dans la base canonique est trigonale et a pour coefficients diagonaux la seule valeur propre $(-n^2 \neq 0)$); On peut donc prendre pour $R_n(x)$ un polynôme de degré $(n-1)$, son coefficient dominant étant d'ailleurs $[I_n]$. De plus y et y'' ayant le même parité, l'application $y \mapsto y'' - n^2 y$ laisse stable les deux sous-espaces supplémentaires formés des polynômes pairs (respectivement impairs) de degré au plus $(n-1)$ et induit donc pour des raisons de dimension un isomorphisme sur chacun de ses espaces. Comme le second membre à la parité de $(n-1)$ par construction et hypothèse de récurrence, on en déduit que R_n a bien la parité de $(n-1)$.

Finalement on peut écrire la solution A_n sur $\mathbb{R}_+$ sous la forme : $A_n(x) = P_n(e^{-x}) + R_n(x) + \alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}$. Mais comme au IV.E), on a la majoration $|A_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} x^n = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(x^n)$ et donc $\alpha = 0$ (sinon $A_n(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \alpha e^{nx}$ ce qui est contradictoire avec la majoration précédente). Soit le résultat voulu :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, A_n(x) &= \beta e^{-nx} + \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2 - n^2} \beta_{n-2,k} e^{-kx} + R_n(x) \\ &= Q_n(e^{-x}) + R_n(x) \\ &\text{où } Q_n(X) = \beta X^n + \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2 - n^2} \beta_{n-2,k} X^k \end{aligned}}$$

Les polynômes Q_n et R_n conviennent visiblement, mais remarquons qu'à ce stade le coefficient β n'est pas connu et on ne peut pas affirmer que le degré de Q_n soit exactement n . Conformément à la notation générale on pose désormais $\beta_{n,n} = \beta$.

2ème étape :

On sait d'après les calculs du IV.B) que pour $n \geq 2$, $A_n(0) = A'_n(0) = 0$ et donc que $Q_n(1) + R_n(0) = -Q'_n(1) + R'_n(0) = 0$, mais compte-tenu de la parité de R_n on a : $R_{2p}(0) = 0$ et $R'_{2p+1}(0) = 0$, d'où : $Q_{2p}(1) = -Q'_{2p+1}(1) = 0$, et donc selon l'écriture générale des coefficients des polynômes A_n :

$$\forall p \geq 1, \beta_{2p,2p} = - \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{2p,2k} \text{ et } \beta_{2p+1,2p+1} = - \frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (2k+1) \beta_{2p+1,2k+1}$$

Par ailleurs l'expression de Q_n vue à la première étape donne les relations de récurrence suivantes en distinguant les cas n pair ($= 2p \geq 2$) et n impair ($= 2p+1 \geq 3$) :

$$\forall p \geq (k+1), \beta_{2p,2k} = \frac{2p(2p-1)}{4(k-p)(k+p)} \beta_{2(p-1),2k} \text{ et } \beta_{2p+1,2k+1} = \frac{2p(2p+1)}{4(k-p)(k+p+1)} \beta_{2p-1,2k+1}$$

On obtient immédiatement par récurrence sur $p \geq k+1$:

$$\begin{aligned}
\beta_{2p,2k} &= \left(\prod_{r=k+1}^p \frac{2r(2r-1)}{(k-r)(k+r)} \right) (-4)^{k-p} \beta_{2k,2k} = \frac{(2p)!}{(2k)!} \frac{(2k)!}{(p-k)!(p+k)!} (-4)^{k-p} \beta_{2k,2k} \\
\boxed{\beta_{2p,2k}} &= \boxed{(-4)^{k-p} C_{2p}^{p-k} \beta_{2k,2k}} \quad \text{et} \\
\beta_{2p+1,2k+1} &= \left(\prod_{r=k+1}^p \frac{2r(2r+1)}{(k-r)(k+r+1)} \right) (-4)^{k-p} \beta_{2k+1,2k+1} = \frac{(2p+1)!}{(2k+1)!} \frac{(2k+1)!}{(p-k)!(p+k+1)!} (-4)^{k-p} \beta_{2k+1,2k+1} \\
\boxed{\beta_{2p+1,2k+1}} &= \boxed{(-4)^{k-p} C_{2p+1}^{p-k} \beta_{2k+1,2k+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi tous les coefficients du polynôme Q_n sont connus dès que les coefficients $(\beta_{k,k})_{0 \leq k \leq n-2}$ le sont ; et ce sont justement ceux dont on doit montrer la non nullité !

Au vu des premiers coefficients : $\beta_{1,1} = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_{2,2} = \frac{\pi}{4}$, $\beta_{3,3} = -\frac{\pi}{8}$ on peut "raisonnablement" conjecturer que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \beta_{n,n} = (-1)^n \frac{\pi}{2^n}}$$

Enfin remarquons le cas particulier de $\beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ qui ne rentre pas dans la forme précédente.

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur p en distinguant les cas n pair ($=2p$) et n impair ($=2p+1$).

Cas $n=2p$ (≥ 2)

La formule est vérifiée au rang $p=1$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p-1 \geq 1$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\beta_{2p,2p} &= -\sum_{k=0}^{p-1} \beta_{2p,2k} = -\sum_{k=0}^{p-1} (-4)^{k-p} C_{2p}^{p-k} \beta_{2k,2k} \\
&\quad \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence en distinguant le cas } k=0 \\
&= -\sum_{k=1}^{p-1} (-4)^{k-p} C_{2p}^{p-k} \frac{\pi}{2^{2k}} - (-4)^{-p} C_{2p}^p \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}} \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} C_{2p}^{p-k} + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^p \right) \\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}} \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^p \right) \quad (\text{en changeant } k \text{ en } p-k) \\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}} \left(\sum_{k=p+1}^{2p-1} (-1)^k C_{2p}^k + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^p \right) \quad (\text{en changeant } k \text{ en } 2p-k, \text{ sachant que } C_{2p}^{2p-k} = C_{2p}^k) \\
&= -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{2p-1} (-1)^k C_{2p}^k + (-1)^p C_{2p}^p \right) \quad (\text{par demi-somme des deux derniers résultats}) \\
&= -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^k C_{2p}^k = -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \left(\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k - 2 \right) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{2^{2p}}} \quad (\text{car } \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k = (1-1)^{2p} = 0 \text{ pour } p \geq 1)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geq 1 : \beta_{2p,2p} = \frac{\pi}{4^p} \neq 0 \text{ et } Q_{2p}(X) = \frac{\pi}{4^p} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} C_{2p}^{p-k} X^{2k} + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^p \right)}$$

Cas $n=2p+1$ (≥ 1)

On procède de même : La formule est vérifiée au rang $p=0$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p-1 \geq 0$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\beta_{2p+1,2p+1} &= -\frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (2k+1) \beta_{2p+1,2k+1} = -\frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (2k+1) (-4)^{k-p} C_{2p+1}^{p-k} \beta_{2k+1,2k+1} \\
&\quad \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (-4)^{k-p} (2k+1) C_{2p+1}^{p-k} \frac{\pi}{2^{2k+1}} \\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} (2k+1) C_{2p+1}^{p-k} \\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)} \sum_{k=1}^p (-1)^k (2p-2k+1) C_{2p+1}^k \quad (\text{en changeant } k \text{ en } p-k) \\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)} \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^{k+1} (-2p+2k-1) C_{2p+1}^k \quad (\text{en changeant } k \text{ en } 2p+1-k) \\
&= \frac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)} \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k (2p-2k+1) C_{2p+1}^k \quad (\text{par demi-somme des deux derniers résultats}) \\
&= \frac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)} \left(\sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k (2p+1-2k) C_{2p+1}^k - (2p+1) - (2p+1) \right) \\
&= \boxed{-\frac{\pi}{2^{2p+1}}} \\
&\quad (\text{car } \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k (2p+1) C_{2p+1}^k = (2p+1)(1-1)^{2p+1} = 0 \text{ et } k C_{2p+1}^k = (2p+1) C_{2p}^{k-1} \\
&\quad \text{donc } \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k k C_{2p+1}^k = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k (2p+1) C_{2p}^{k-1} = (2p+1)(1-1)^{2p} = 0)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geq 0 : \beta_{2p+1,2p+1} = -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \neq 0 \text{ et } Q_{2p+1}(X) = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^p (-1)^{p+1-k} C_{2p+1}^{p-k} X^{2k+1}}$$

Bonus : un petit programme en Maple pour déterminer les valeurs de $(I_n)_{n \leq 2N+1}$ et de $(A_n(x))_{n \leq 2N+1}$ et sa réalisation pour $N=4$:


```

y2:=diff(y(x),x,x): eq:=y2-n^2*y(x)=n*(n-1)*a-n^2*x^(n-1)*j:
B:=Pi/2: C:=Pi/2-Pi/2*exp(-x): s1:=J(1)=Pi/2: s2:=A(0)=B,A(1)=C:
for p from 1 to N do
eqpair:=subs({n=2*p,a=B},eq); eqimpair:=subs({n=2*p+1,a=C},eq);
convert(dsolve({eqpair,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(x)),exp): expand(%):
solde:=combine(%,exp): sold:=collect(solde,exp(2*p*x),simplify);
sort(sold,exp(2*p*x)); alpha:=op([2,1,1],sold); k:=solve(alpha=0):
sol:=subs(j=k,sold); B:=subs(sol,y(x)): s1:=s1,J(2*p)=k:
B1:=subs(exp(x)=1/X,expand(B)): sort(B1,[x,X],plex); Q:=coeff(B1,x,0):
R:=B1-Q: l:=lcoeff(Q,X): Q:=expand(Q/l):
s2:=s2,A(2*p)=l*combine(subs(X=exp(-x),Q),exp)+R:
convert(dsolve({eqimpair,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(x)),exp): expand(%):
solde:=combine(%,exp): sold:=collect(solde,exp((2*p+1)*x),simplify);
sort(sold,exp((2*p+1)*x)); alpha:=op([2,1,1],sold); k:=solve(alpha=0):
sol:=subs(j=k,sold); C:=subs(sol,y(x)): s1:=s1,J(2*p+1)=k:
C1:=subs(exp(x)=1/X,expand(C)): sort(C1,[x,X],plex); R:=coeff(C1,X,0):
Q:=C1-R: l:=lcoeff(Q,X): Q:=expand(Q/l):
s2:=s2,A(2*p+1)=l*combine(subs(X=exp(-x),Q),exp)+R:
od:
s1; s2;

```

Et les résultats pour $N = 4$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\pi, I_2 = \frac{1}{2}\pi, I_3 = \frac{3}{8}\pi, I_4 = \frac{1}{3}\pi, I_5 = \frac{115}{384}\pi \\
I_6 &= \frac{11}{40}\pi, I_7 = \frac{5887}{23040}\pi, I_8 = \frac{151}{630}\pi, I_9 = \frac{259723}{1146880}\pi
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}\pi, A_1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi e^{-x}, A_2 = \frac{1}{4}\pi (e^{-2x} - 1) + \frac{1}{2}\pi x, \\
A_3 &= -\frac{1}{8}\pi (e^{-3x} - 3e^{-x}) + \frac{3}{8}\pi x^2 - \frac{1}{4}\pi, \\
A_4 &= \frac{1}{16}\pi (e^{-4x} - 4e^{-2x} + 3) + \frac{1}{3}\pi x^3 - \frac{1}{4}\pi x, \\
A_5 &= -\frac{1}{32}\pi (e^{-5x} - 5e^{-3x} + 10e^{-x}) + \frac{115}{384}\pi x^4 - \frac{5}{32}\pi x^2 + \frac{3}{16}\pi, \\
A_6 &= \frac{1}{64}\pi (e^{-6x} - 6e^{-4x} + 15e^{-2x} - 10) + \frac{11}{40}\pi x^5 - \frac{1}{8}\pi x^3 + \frac{3}{16}\pi x, \\
A_7 &= -\frac{1}{128}\pi (e^{-7x} - 7e^{-5x} + 21e^{-3x} - 35e^{-x}) + \frac{5887}{23040}\pi x^6 - \frac{77}{768}\pi x^4 + \frac{7}{64}\pi x^2 - \frac{5}{32}\pi, \\
A_8 &= \frac{1}{256}\pi (e^{-8x} - 8e^{-6x} + 28e^{-4x} - 56e^{-2x} + 35) + \frac{151}{630}\pi x^7 - \frac{1}{12}\pi x^5 + \frac{1}{12}\pi x^3 - \frac{5}{32}\pi x, \\
A_9 &= -\frac{1}{512}\pi (e^{-9x} - 9e^{-7x} + 36e^{-5x} - 84e^{-3x} + 126e^{-x}) + \frac{259723}{1146880}\pi x^8 - \frac{289}{4096}\pi x^6 + \frac{129}{2048}\pi x^4 \\
&\quad - \frac{45}{512}\pi x^2 + \frac{35}{256}\pi
\end{aligned}$$
