Corrigé de l'épreuve de Mathématique : X-ENS-PC-2025
15 Avril 2025

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

Première Partie

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $M = uv^T$. Comme u est dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et v^T est un vecetur de $M_{1,n}(\mathbb{R})$, la matrice M est alors une matrice carrée de taille n. Toutes les colonnes de M sont de la forme $v_j u$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, les v_j étant des scalaires non tous nuls, donc elles sont colinéaires au vecteur non nul u d'où : $\text{rang}(M) = 1$.
2. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Il est immédiat que
$$M = uu^T$$
où $u^T = (1, ..., 1)$. Comme $u \neq 0$, il découle de la question précédente que la matrice J est de rang 1.
3. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Il existe alors une colonne non nulle de K que l'on note u pour laquelle les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de K vérifient $C_j = v_j u$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ où les v_j sont des scalaires non tous nuls. En posant $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $K = uv^T$.
4. Soient $u, v, x, y \in \mathbb{R}^n \backslash 0$.
Si $u = \lambda x$ et $v = \dfrac{1}{\lambda} y$ pour un certain scalaire λ non nul, alors on a clairement : $uv^T = xy^T$.
Réciproquement, supposons que $uv^T = xy^T$. Ainsi, $uv^T v = y^T v x$ et donc
$$u = \frac{y^T v}{\|v\|^2} x.$$
On pose alors
$$\lambda = \frac{y^T v}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}^*.$$
En injectant cette nouvelle expression de u dans l'égalité $uv^T = xy^T$, on obtient $\lambda x v^T = xy^T$. Ainsi, $\lambda v x^T = y x^T$, puis on a : $\lambda v \|x\|^2 = y \|x\|^2$. Finalement, on a : $v = \dfrac{1}{\lambda} y$, d'où le résultat demandé.
5. Soit $K \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1, il existe alors $u, v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tels que : $K = uv^T$.
   (a) Posons $u^T = (u_1, ..., u_n)$ et $v^T = (v_1, ..., v_n)$. Alors, $K = \big(u_i v_j\big)_{1 \leq i,j \leq n}$. Par suite
$$\text{Tr}(K) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \langle u, v \rangle.$$

(b) La question précédente fournit

$$K^2 = uv^Tuv^T = (v^Tu)uv^T = \mathrm{Tr}(K)K.$$

(c) Supposons que $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$ alors $X^2 - \mathrm{Tr}(K)X$ est un polynome annulateur de K qui est en outre scindé et à racines simples : 0 et $\mathrm{Tr}(K)$. Il en résulte que K est diagonalisable.

Réciproquement, supposons que K est diagonalisable. Si $\mathrm{Tr}(K) = 0$, K serait nilpotente en vertu de la question précendente et on a présisément : $K^2 = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(K) \subset \{0\}$ et comme K n'est pas inversible, $\mathrm{Sp}(K) = \{0\}$. Ceci permet de conclure que K est nulle ce qui est aburde car le rang de K est 1. Par suite, $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$.

6. Supposons que P est un projecteur orthogonal de rang 1, alors : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P)$ et $\mathrm{Im}(P) \perp \ker(P)$. Soit y un vecteur unitaire de $\mathrm{Im}(P)$ et posons $A = yy^T$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque que l'on décompose sous la forme $x = ay + z$ où $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \ker(P)$. Alors

$$Px = ay \text{ et } Ax = a\langle y, y\rangle y + \langle y, z\rangle y = ay.$$

Par conséquent, $Px = Ax$ pour x quelconque et donc $P = yy^T$.

Réciproquent, soit $y \in \mathbb{R}^n$ unitaire tel que : $P = yy^T$. On a : $P^2 = \|y\|^2 yy^T = P$ ce qui affrme que P est un projecteur. Comme $Py = y$ alors $y \in \mathrm{Im}(P)$ et comme $\mathrm{rang}(P) = 1$ alors

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{vect}(y).$$

D'autre part, si $u \in \mathrm{vect}(y)^\perp$ alors $Pu = \langle y, u\rangle y = 0$ et à fortiori : $\mathrm{vect}(y)^\perp \subset \ker(P)$. De surcroît, on sait que $\dim\ker(P) = n - 1 = \dim \mathrm{vect}(y)^\perp$, alors

$$\ker(P) = \mathrm{vect}(y)^\perp.$$

Ceci montre que : $\ker(P) \perp \mathrm{Im}(P)$ et P est, dés lors, un projecteur orthogonal.

Deuxième Partie

7. Un calcul routinier fournit immédiatement

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{v}^T\mathbf{u} + 1 \end{pmatrix}.$$

8. On a $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\det \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_n + uv^T)$ et $\det \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{v}^T\mathbf{u} + 1 \end{pmatrix} = v^Tu + 1 = 1 + \langle v, u\rangle$. Le résultat est alors immédiat en vertu de la question précédente.

9. Comme A est inversible, alors $\det(A + uv^T) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}uv^T)$. En appliquant le résultat de la question précédente au vecteur $A^{-1}u$ au lieu de u, on obtient

$$\det(A + uv^T) = \det(A)\big(1 + \langle A^{-1}u, v\rangle\big).$$

10. La matrice $A + uv^T$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, ceci est réalisé, tenant compte de la question précédente, si et seulement si $\langle v, A^{-1}u\rangle \neq -1$.

11. Posons $B = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u}\rangle}$. On a

$$\begin{aligned} B(A + uv^T) &= I_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T + A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T\big(1 + v^T A^{-1}u\big)}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

On conclut que

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u}\rangle}.$$

12. La réponse est non. Prenons l'exemple suivant : $C = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O_{n-1,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ où $0_{n-1,1}$ est le colonne nul de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Posons $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^T = (0, ..., 0, 1)$. Alors, uu^T est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position (n, n) qui vaut 1. Par conséquent, $C + uu^T = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Troisième Partie

13. On a $(uu^T)^T = uu^T$ et donc uu^T est une matrice symétrique. Ainsi, la matrice B est symétrique puisqu'elle est la somme de deux matrices symétriques.

14. Soit $D = \sum_{k=1}^{n} v_k v_k^T$. Pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, on a $Dv_j = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, v_j\rangle v_k = v_j = I_n v_j$. Ceci montre que les matrices D et I_n coincident sur une base de $\mathbb{R}^n$, d'où : $D = I_n$.

15. (a) Posons $C = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k w_k^T$. Pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, on a

$$Cw_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle w_k, w_j\rangle w_k = \lambda_j w_j = Aw_j.$$

Ceci montre que les matrice C et A coincident sur une base de $\mathbb{R}^n$, d'où : $C = A$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. En utilisant la question 14, on obtient

$$\begin{aligned} (xI_n - A)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{x - \lambda_k} w_k w_k^T - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} \lambda_k w_k w_k^T \\ &= \sum_{k=1}^{n} w_k w_k^T \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

16. (a) On a :
$$\dim\left(E+\{u\}^T\right)=\dim(E)+\dim\{u\}^T-\dim\left(E\cap\{u\}^T\right)\leq n.$$
Comme A est symétrique, elle est diagonalisaable et on a $\dim(E)=m$. Par suite,
$$\dim\left(E\cap\{u\}^T\right)\geq m-1.$$
(b) Pour tout $x\in E\cap\{u\}^T$, on a $Bx=\lambda x$ et par conséquent, $E\cap\{u\}^T\subset\ker(B-\lambda I_n)$. Il en résulte que : $\dim\ker(B-\lambda I_n)\geq m-1$ et comme B est symétrique, λ est une valeur propre de multiplicité égale au dimension du sous-espace propre associé, donc λ est une valeur propre de B de multiplicité au moins $m-1$.

17. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$. On a
$$\chi_B(x)=\chi_A(x)\det\left(I_n-(xI_n-A)^{-1}uu^T\right).$$
Grâce à la question 8, on obtient
$$\chi_A(x)\det\left(1-\langle u,(xI_n-A)^{-1}u\rangle\right).$$
Par application du résultat de la question 15-b, on déduit que
$$\begin{aligned}\chi_B(x)&=\chi_A(x)\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\lambda_k}u^Tw_kw_k^Tu\right)\\&=\chi_A(x)\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\langle w_k,u\rangle^2}{x-\lambda_k}\right).\end{aligned}$$

18. (a) Si $J=\emptyset$, alors u serait orthogonal à tous les vecteurs de la base $(w_1,...,w_n)$ et donc u serait orthogonal à $\mathrm{vect}\big((w_1,...,w_n)\big)=E$. Ceci implique que $u=0$ ce qui est absurde. Par suite, $J\neq\emptyset$.
(b) Soit $l\notin J$, alors
$$Bw_l=Aw_l+u\langle u,w_l\rangle=Aw_l=\lambda_lw_l.$$
D'où le résultat.
(c) La question précédente montre que les λ_l sont des valeurs propres de B pour tout $l\neq j$.
Par ailleurs, comme $(w_1,...,w_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, on a
$$u=\sum_{k=1}^{n}\langle u,w_k\rangle w_k=\langle u,w_j\rangle w_j.$$
Comme u est unitaire,
$$|\alpha_j|=|\langle u,w_j\rangle|=1.$$
Par conséquent,
$$Bw_j=Aw_j+\alpha_j^2\langle w_j,w_j\rangle w_j=(1+\lambda_j)w_j.$$
Ceci montre que λ_j+1 est une valeur propre de B ce qui achève la démonstration.

19. (a) La fonction f est une fraction rationnelle de pôles λ_1,...,λ_n donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Un calcul routinier fournit

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \quad f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle w_k, u\rangle^2}{(x-\lambda_k)^2}.$$

(b) Pour tout $l \in \{1, ..., n-1\}$, f est continue et strictement décroissante sur $]\lambda_l, \lambda_{l+1}[$ donc f réalise une bijection de $]\lambda_l, \lambda_{l+1}[$ sur $\left] \lim\limits_{x\to\lambda_{l+1}^-} f(x), \lim\limits_{x\to\lambda_l^+} f(x) \right[= \mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]\lambda_l, \lambda_{l+1}[$ pour tout $l = 1, ..., n-1$.
Idem, f réalise une bijection de $]\lambda_n, +\infty[$ sur $\left] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\lambda_n^+} f(x) \right[= \mathbb{R}$ et donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solutions dans $]\lambda_n, +\infty[$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, il découle de la question 17 que $\chi_B(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 1$. Par ailleurs, la question précédente montre l'équation $f(x) = 1$ admet n racines $\mu_1 \in]\lambda_1, \lambda_2[$,...,$\mu_{n-1} \in]\lambda_{n-1}, \lambda_n[$ et $\mu_n \in]\lambda_n, +\infty[$.
Par conséquent, $\mathrm{Sp}(B) = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ et on a

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ... < \lambda_n < \mu_n.$$

Quatrième Partie

20. La variable aléatoire U suit la loi uniforme de paramètre n et donc : $P(U = u_i) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $i = 1, ..., n$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $g(x) = \langle x, w\rangle$. Par application du théorème de transfert, on obtient

$$\mathbb{E}\big(g(U)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(u_i)P(U = u_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle u_i, w\rangle.$$

Comme $(u_1, ..., u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, on déduit aussitôt que

$$\mathbb{E}\big(\langle U, w\rangle\big) = \frac{1}{n}\|w\|^2.$$

21. Comme $U(\Omega)$ est un ensemble fini, il en est de même pour $B(\Omega)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, la variable aléatoire $\chi_B(x)$ prend un nombre fini de valeurs, ceci confirme bien que son espérance est finie.
Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. On pose

$$B_i = A + u_i u_i^T, \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

En se réferant à la question 17 et en appiquant le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(x) P(U=u_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle w_k, u_i\rangle}{x-\lambda_k} \\
&= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_k} \sum_{i=1}^{n} \langle w_k, u_i\rangle \\
&= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|w_k\|^2}{x-\lambda_k} \qquad \big((u_1, ..., u_n) \text{ b.o.n}\big) \\
&= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Soulignons que le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\lambda_i).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_k}.$$

En conclusion, on a

$$\mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) = \chi_A(x) - \frac{\chi_A'(x)}{n}.$$

22. Rappelons-nous que, par le théorème de transfert, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(x).$$

Ainsi, la fonction $\varphi : x \mapsto \mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big)$ est polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. De même, l'application : $\psi : x \mapsto \chi_A(x) - \dfrac{\chi_A'(x)}{n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale. Il s'ensuit que φ et ψ sont deux applications continues sur $\mathbb{R}$ et coincident sur $\mathbb{R}\backslash\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, donc elles coincident sur $\mathbb{R}$. En remarquant que $\chi_A(\lambda_k) = 0$ si $k \in \{1, ..., n\}$, on déduit aussitôt l'identité escomptée.

23. On a vu dans la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) = \chi_A(x) - \frac{\chi_A'(x)}{n}.$$

Si $\mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors : $\chi_A(x) = \dfrac{\chi_A'(x)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde car χ_A' et χ_A' ont des degrés différents. Par suite, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\big(\chi_B(x)\big) \neq 0$.

Cinquième Partie

Soit $\varepsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

24. L'intervalle $]0, \lambda_{m+1}[$ ne contient manifestement aucune valeur propre de A. On en tire que $A - \varepsilon I_n$ est inversible.
25. D'abord, on a
$$B - \varepsilon I_n = (A - \varepsilon I_n)^{-1} \left[I_n + (A - \varepsilon I_n)^{-1} uu^T\right].$$
La question 8 suggère que l'on a
$$\det\left(\left[I_n + (A - \varepsilon I_n)^{-1} uu^T\right] \right) = 1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u)\rangle < 0.$$
On en déduit que $B - \varepsilon I_n$ est inversible comme étant produit de deux matrices inversibles.
26. Notons que $(B - \varepsilon I_n)^{-1} = \left[(A - \varepsilon I_n) + uu^T\right]^T$ et rappelons-nous que la matrice $A - \varepsilon I_n$ est inversible. Les hypothèses amenant au résultat démontré dans la question 11 sont alors réunies et par conséquent, on a
$$(B - \varepsilon I_n)^{-1} = (A - \varepsilon I_n)^{-1} - \frac{(A - \varepsilon I_n)^{-1} uu^T (A - \varepsilon I_n)^{-1}}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u\rangle}.$$
Comme la matrice A est symétrique, il en de même pour la matrice $A - \varepsilon I_n$ et donc $(A - \varepsilon I_n)^{-1}$ est symétrique. Par suite,
$$(B - \varepsilon I_n)^{-1} = (A - \varepsilon I_n)^{-1} - \frac{(A - \varepsilon I_n)^{-1} u \left((A - \varepsilon I_n)^{-1} u\right)^T}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u\rangle}.$$
Par ailleurs, la question 5-a fournit
$$\mathrm{Tr}\left((A - \varepsilon I_n)^{-1} u \left((A - \varepsilon I_n)^{-1} u\right)^T \right) = \left\|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\right\|^2.$$
En remarquant que $\|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\|^2 > 0$ car u est non nul, on conclut que
$$\mathrm{Tr}\big((B - \varepsilon I_n)^{-1}\big) - \mathrm{Tr}\big((A - \varepsilon I_n)^{-1}\big) = -\frac{\|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\|^2}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u\rangle} > 0.$$
D'où le résultat prononcé.
27. Au vu des hypothèses sur les valeurs propres de A et B, on déduit que : $\mu_k = 0$ lorsque $k \in \{1, ..., m-1\}$ car dans ce cas, on a : $\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1}$. De plus, $0 \leq \mu_m \leq ... \leq \mu_n$. Par ailleurs, la matrice $B - \varepsilon I_n$ étant inversible, son spectre ne contient pas 0, en particulier, $\mu_m \neq \varepsilon$. D'autre part, on sait que lorqu'une matrice M est diagonalisable et inversible alors $\mathrm{Sp}(M^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$. En se rappelant que la trace est la somme des valeurs propres et en utilisant la question précédente, on trouve que
$$\frac{-1}{\varepsilon}(m-1) + \frac{1}{\mu_m - \varepsilon} + ... + \frac{1}{\mu_n - \epsilon} > \frac{-1}{\varepsilon}(m) + \frac{1}{\lambda_{m+1} - \varepsilon} + ... + \frac{1}{\lambda_n - \epsilon}.$$

Par conséquent,
$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\mu_m-\varepsilon}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\mu_k-\varepsilon}-\frac{1}{\lambda_k-\varepsilon}\right)>0.$$
Comme $0<\lambda_k-\varepsilon\leq\mu_k-\varepsilon$ pour tout $k\in\{m+1,..,,n\}$, alors
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\mu_k-\varepsilon}-\frac{1}{\lambda_k-\varepsilon}\right)\leq 0.$$
Il en résulte que
$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\mu_m-\varepsilon}>0.$$
Ainsi,
$$\frac{\mu_m}{\varepsilon(\mu_m-\varepsilon)}>0.$$
Comme $\mu_m\geq 0$, on conclut que
$$\mu_m>\varepsilon.$$