Concours commun Mines et Ponts 2025

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES II MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Critère de Schur-Cohn et généralisation au cas non inversible

A. Propriétés du polynôme p_0 stabilité des racines

1 ▷ Soit $p(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$p_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k$$
par changement d'indice $j = n - k$
$$p_0(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} = x^n \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\frac{1}{x}\right)^j$$
Ainsi $\boxed{p_0(x) = x^n p(1/x)}$.

- Le polynôme p est scindé sur $\mathbb{R}$ et a pour racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donc $p(X) = a_n \prod\limits_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a
$$\begin{aligned} p_0(x) = x^n p(1/x) &= x^n \left(a_n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{x} - \alpha_j\right)\right) \\ &= x^n a_n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \alpha_j x}{x}\right) \\ &= x^n a_n \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j x)}{x^n} \\ &= a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j x). \end{aligned}$$
Les fonctions polynomiales associées à $p_0(X)$ et $a_n \prod\limits_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X)$ coïncident sur $\mathbb{R}^*$, qui est infini, donc il sont égaux : $\boxed{p_0(X) = a_n \prod\limits_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).}$

[1]Tous mes corrigés sont disponibles ici `https://tinyurl.com/4up84xze` 28-04-2025

2 $\triangleright$ Soit $d = p \wedge p_0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $d \neq 1$. Alors d est scindé sur $\mathbb{R}$, par conséquent p et p_0 ont une racine commune $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha = 0$, alors $p_0(0) = a_n = 0$ ce qui est absurde ($a_n \neq 0$), donc $\alpha \neq 0$.
On a $p(\alpha) = 0$ et $p_0(\alpha) = \alpha^n p(1/\alpha) = 0$, donc $p(\alpha) = 0$ et $p(1/\alpha) = 0$. Ainsi α est une racine stable de p.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que p admet une racine stable α. Par définition, $\alpha \neq 0$, $p(\alpha) = 0$ et $p(1/\alpha) = 0$. Alors $p_0(\alpha) = \alpha^n p(1/\alpha) = 0$. Comme α est une racine commune à p et p_0 alors $(X - \alpha)$ divise d, ce dernier n'est pas constant égal à 1.
Conclusion: $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

3 $\triangleright$ On suppose que toutes les racines α_j de p sont stables et de multiplicité 1.
Si α est une racine de p, alors α est stable, donc $\alpha \neq 0$ et $1/\alpha$ est aussi racine de p. De plus, comme les racines sont de multiplicité 1, $\alpha \neq 1/\alpha$, donc $\alpha \neq \pm 1$. Par suite l'ensemble des racines $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est stable par l'application $x \mapsto 1/x$ et les deux ensembles
$\{1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n\}$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sont identiques.
Puisque p et p_0 ont les mêmes racines donc ils sont proportionnels : $p_0 = c \cdot p$ pour un $c \in \mathbb{R}^*$.
La relation $p_0(x) = x^n p(1/x)$, pour $x \neq 0$,donne

$$cp(x) = x^n p(1/x)$$

appliquée à $1/x$ devient après simplification

$$x^n p(1/x) = (1/c).p(x)$$

on en déduit que

$$cp(x) = (1/c).p(x)$$

p n'est pas identiquement nul donc $c^2 = 1$ et $c = \pm 1$.
Ainsi il existe donc $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $\boxed{p = \lambda p_0.}$

4 $\triangleright$ On a $h(X) = Xp'(X)$ et $h_0 = (p')_0$.

- On a $p'(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$donc $h(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^k$.
  De la question Q3 on a $p = \lambda p_0$, avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, donc

  $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k$$

  par suite

  $$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad a_k = \lambda a_{n-k}$$

  Et on a

  $$(p')_0(X) = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{(n-1)-(k-1)} = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{n-k}$$

  donc

  $$(p')_0(X) = \lambda \sum_{k=0}^{n} k a_{n-k} X^{n-k}$$

par le changement $j = n - k$

$$(p')_0(X) = \lambda \sum_{j=0}^{n} (n-j) a_j X^j = \lambda n \sum_{j=0}^{n} a_j X^j - \lambda \sum_{j=0}^{n} j a_j X^j = \lambda n\ p(X) - \lambda\ h(X)$$

Comme $\lambda \in \{-1, 1\}$ alors $\boxed{h(X) = n\ p(X) - \frac{1}{\lambda}(p')_0(X) = n\ p(X) - \lambda (p')_0(X)}$.

- Calculons h_0.
  La formule précédente donne

  $$h_0(x) = x^n h(1/x) = n x^n\ p(1/x) - \lambda x^n (p')_0(1/x)$$

  comme $p_0(x) = x^n p(1/x)$ et $(p')_0(x) = x^{n-1} p'(1/x)$ alors

  $$h_0(x) = n\ p_0(x) - \lambda x p'(x)$$

  or on a $p = \lambda p_0$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, donc $\boxed{h_0(X) = \lambda(n\ p(X) - X p'(X))}$.

5 ▷ Montrons que p' est scindé sur $\mathbb{R}$ et $h \wedge h_0 = 1$.

- p est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
  Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le théorème de Rolle, affirme que p' admet au moins une racine β_i dans $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$.
  Donc p' admet au moins $n-1$ racines deux à deux distincte et il est de degré $n-1$, donc p' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples (β_i *est unique dans* $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$).

- Calcul de $h \wedge h_0$.
  Soit γ une racine commune de h et h_0.
  On a $h(\gamma) = \gamma p'(\gamma) = 0$, donc $\gamma = 0$ ou $p'(\gamma) = 0$ et $h_0(\gamma) = \lambda(np(\gamma) - \gamma p'(\gamma)) = 0$.
  - Si $\gamma = 0$, alors

    $$h_0(0) = \lambda n p(0) = \lambda n a_0 = 0.$$

    Et on a

    $$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad a_k = \lambda a_{n-k}$$

    donc $a_n = 0$ ce qui est absurde.

  - Si $\gamma \neq 0$, alors $p'(\gamma) = 0$. La relation $h_0(\gamma) = 0$ devient $\lambda n p(\gamma) = 0$, donc $p(\gamma) = 0$. Par suite γ est une racine commune de p et p', ceci est impossible car les racines de p sont simples.

  Les deux cas sont impossibles. Donc h et h_0 n'ont pas de racine commune et $\boxed{h \wedge h_0 = 1}$.

- D'après Q2, $h \wedge h_0 = 1$ implique que h n'a pas de racine stable. Les racines de $h(X) = Xp'(X)$ sont 0 et les racines β_j de p'.
  Les racines stables de h sont aussi des racines stables de p'. Ainsi p' n'a pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

6 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$ et

$$f_j(X) = a_n \prod_{\ell=j+1}^{n} (1 - \alpha_\ell X) \prod_{\ell=1}^{j-1} (X - \alpha_\ell).$$

Supposons qu'il existe i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$.

- Si $k \geq j+1$, le facteur $(1 - \alpha_k X)$ est présent dans le premier produit. Alors

$$f_j(\alpha_i) = a_n (1 - \alpha_k \alpha_i) \prod_{\substack{\ell=j+1 \\ \ell \neq k}}^{n} (1 - \alpha_\ell \alpha_i) \prod_{\ell=1}^{j-1} (\alpha_i - \alpha_\ell) = 0.$$

  Si $k \leq j$, alors $i < k \leq j$, donc $i \leq j - 1$. Le facteur $(X - \alpha_i)$ est présent dans le second produit, donc $f_j(\alpha_i) = 0$.
  Ainsi $f_j(\alpha_i) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

- Considérons la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ Q & \mapsto & Q(\alpha_i) \end{array}$$

  D'après le point précédent on a

$$\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_n) \subset \operatorname{Ker}(\Phi).$$

  Comme Φ est non nulle alors $\operatorname{Im} \Phi = \mathbb{R}$ et

$$\dim \operatorname{Ker}(\Phi) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - 1 = n - 1.$$

  La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ contient n vecteurs dans un espace de dimension au plus $n - 1$, elle est donc liée.

7 ▷ On suppose désormais qu'aucune racine de p n'est stable. Donc $p \wedge p_0 = 1$. E est l'ensemble des fractions P/Q où Q est un produit de facteurs $1 - \alpha_i X$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}(X)$.

- Soit $f \in E$.

$$P_j(f) = \frac{(1 - \alpha_j X) f(X) - (1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

  c'est une fraction rationnelle, son numérateur $N(X) = (1 - \alpha_j X) f(X) - (1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j)$ s'annule en α_j, donc $(X - \alpha_j)$ divise $N(X)$.
  Les pôles de f sont parmi $\{1/\alpha_k, k \in [\![1, n-1]\!]\}$, donc $P_j(f) \in E$.
  La linéarité de P_j est claire, donc P_j est un endomorphisme de E.

- On a

$$f \in \operatorname{Ker}(P_j) \iff (1 - \alpha_j X) f(X) - (1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j) = 0 \iff f(X) = \frac{(1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j)}{1 - \alpha_j X}.$$

  Ce qui signifie que f doit être une fraction rationnelle de la forme $C/(1 - \alpha_j X)$ pour une constante C.
  Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(P_j) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{1 - \alpha_j X}\right)}$.

8 ▷ Soit $j \in [\![1,n]\!]$ et $g \in E$.
Posons $f(X) = \dfrac{(X-\alpha_j)g(X)}{1-\alpha_j X}$. On a $f \in E$ et $f(\alpha_j) = 0$.
donc
$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f(X) - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X-\alpha_j} = \frac{(1-\alpha_j X)\frac{(X-\alpha_j)g(X)}{1-\alpha_j X}}{X-\alpha_j} = g(X)$$
Ainsi $\boxed{P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right) = g}$.

9 ▷ Montrons que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
Soit $(c_1, \dots, c_n)$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k = 0$, la division par $\prod\limits_{m=1}^{n}(1-\alpha_m X)$ donne $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k = 0$ (*).
Pour $j \in [\![1,n]\!]$ on a
$$g_j(X) = \frac{a_n \prod\limits_{m=j+1}^{n}(1-\alpha_m X)\prod\limits_{m=1}^{j-1}(X-\alpha_m)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(1-\alpha_m X)} = \frac{a_n}{(1-\alpha_j X)}\frac{\prod\limits_{m=1}^{j-1}(X-\alpha_m)}{\prod\limits_{m=1}^{j-1}(1-\alpha_m X)}.$$
donc
$$P_1(g_j) = P_1\left(\frac{X-\alpha_1}{1-\alpha_1 X}\frac{a_n \prod\limits_{m=2}^{j-1}(X-\alpha_m)}{(1-\alpha_j X)\prod\limits_{m=2}^{j-1}(1-\alpha_m X)}\right) = \frac{a_n \prod\limits_{m=2}^{j-1}(X-\alpha_m)}{(1-\alpha_j X)\prod\limits_{m=2}^{j-1}(1-\alpha_m X)}$$
ainsi par récurrence
$$P_{j-1}\circ \dots \circ P_1(g_j) = \frac{a_n}{(1-\alpha_j X)} \text{ et } P_j \circ \dots \circ P_1(g_j) = 0$$
par conséquent
$$P_{n-1}\circ \dots \circ P_1(g_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![1,n]\!] \\ \dfrac{a_n}{(1-\alpha_j X)} & \text{si } \ j = n \end{cases}$$
On compose dans la relation (*) par $P_{n-1}\circ \dots \circ P_1$:
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \ P_{n-1}\circ \dots \circ P_1\,(g_k) = c_n \frac{a_n}{(1-\alpha_j X)} = 0$$
donc $c_n = 0$ et (*) devient $\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k g_k(\alpha_i) = 0$. Une récurrence donne $c_1 = \dots = c_n = 0$.
Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre. C'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ La matrice S est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On a $S_{i,j} = \delta_{i+1,j}$, $S_{i,j}^T = S_{ji} = \delta_{j+1,i}$ et $U = e_1$.
Par suite :
$(S^T)^0 U = \mathrm{I}_n U = e_1$.
$(S^T)^1 U = S^T e_1$ et $(S^T e_1)_i = \sum\limits_j S_{ij}^T e_{1j} = S_{i1}^T = \delta_{2,i}$.
Donc $S^\intercal e_1 = e_2$.
Par récurrence on a $(S^\intercal)^k U = e_{k+1}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Donc $\left((S^\intercal)^i U\right)_{0 \le i \le n-1} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, c'est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

11 ▷ Remarquons que

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\intercal (C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j) f_j(S) = \sum_{j=1}^{n-1} \left([C_j f_j(S)]^\intercal [C_j f_j(S)] - [B_j f_j(S)]^\intercal [B_j f_j(S)] \right) \quad (1)$$

- Calculons les termes $C_j f_j(S)$ et $B_j f_j(S)$.
  La commutativité de l'algèbre $\mathbb{R}[S]$ (ensemble des polynômes en S) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C_j f_j(S) &= (\mathrm{I}_n - \alpha_j S) a_n \left(\prod_{k=j+1}^{n} (1 - \alpha_k S) \right) \left(\prod_{k=1}^{j-1} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) \right) \\ &= a_n \left(\prod_{k=j}^{n} (1 - \alpha_k S) \right) \left(\prod_{k=1}^{j-1} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) \right) \end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned} B_j f_j(S) &= (S - \alpha_j \mathrm{I}_n) a_n \left(\prod_{k=j+1}^{n} (1 - \alpha_k S) \right) \left(\prod_{k=1}^{j-1} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) \right) \\ &= a_n \left(\prod_{k=j+1}^{n} (1 - \alpha_k S) \right) \left(\prod_{k=1}^{j} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) \right) \end{aligned}$$

- Pour $j = 1$, on a

$$C_1 f_1(S) = a_n \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k S) = p_0(S).$$

- Pour $j = n$,

$$B_n f_n(S) = a_n \prod_{k=1}^{n} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) = p(S).$$

- Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} C_{j+1} f_{j+1}(S) &= a_n \left(\prod_{k=j+1}^{n} (1 - \alpha_k S) \right) \left(\prod_{k=1}^{j} (S - \alpha_k \mathrm{I}_n) \right) \\ &= B_j f_j(S). \end{aligned}$$

- La relation (1) devient :

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\intercal (C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j) f_j(S) = \sum_{j=1}^{n-1} \left([C_j f_j(S)]^\intercal [C_j f_j(S)] - [C_{j+1} f_{j+1}(S)]^\intercal [C_{j+1} f_{j+1}(S)] \right)$$

  qui est somme télescopique, donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\intercal (C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j) f_j(S) &= [C_1 f_1(S)]^\intercal [C_1 f_1(S)] - [B_n f_n(S)]^\intercal [B_n f_n(S)] \\ &= p_0(S)^\intercal p_0(S) - p(S)^\intercal p(S) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\intercal (C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j) f_j(S)}$.

12 ▷ On a pour $j \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j & = & (\mathrm{I}_n - \alpha_j S^\intercal)(\mathrm{I}_n - \alpha_j S) - (S^\intercal - \alpha_j \mathrm{I}_n)(S - \alpha_j \mathrm{I}_n). \\ & = & \mathrm{I}_n + \alpha_j^2 S^\intercal S - S^\intercal S - \alpha_j^2 \mathrm{I}_n. \\ & = & (1 - \alpha_j^2)(\mathrm{I}_n - S^\intercal S). \end{array}$$

Calculons $S^\intercal S$:

$$(S^\intercal S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} S_{ki} S_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k+1,i} \delta_{k+1,j}.$$

donc

- ▶ Si $i \neq j$ alors $(S^\intercal S)_{ij} = 0$.
- ▶ Si $i = j$ alors $(S^\intercal S)_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{k+1,i}^2 = 1$.

ce qui donne : $(S^\intercal S)_{ii} = 1$ si $i \geq 2$ et $(S^\intercal S)_{11} = 0$.
Donc $S^\intercal S = \mathrm{Diag}(0, 1, \ldots, 1)$.
Par suite $C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j = (1 - \alpha_j^2)\,\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$.
On vérifie facilement que $UU^\intercal = \mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$..
Ainsi $\boxed{C_j^\intercal C_j - B_j^\intercal B_j = (1 - \alpha_j^2) UU^\intercal}$.

13 ▷ En utilisant Q11 et Q12 :

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) f_j(S)^\intercal UU^\intercal f_j(S) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2)\ (U^\intercal f_j(S))^\intercal . U^\intercal f_j(S).$$

et on a $V_j = f_j(S)U$ donc

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V_j V_j^\intercal,$$

et par définition de V et D on a :

$$\begin{aligned} VDV^\intercal &= \left[\begin{array}{c|c|c} V_1 & \ldots & V_n \end{array}\right] \mathrm{Diag}(1 - \alpha_1^2, \ldots, 1 - \alpha_n^2) \left[\begin{array}{c} V_1^\intercal \\ \hline \vdots \\ \hline V_n^\intercal \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} V_1 & \ldots & V_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (1 - \alpha_1^2) V_1^\intercal \\ \hline \vdots \\ \hline (1 - \alpha_n^2) V_n^\intercal \end{array}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V_j V_j^\intercal, \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{J(p) = VDV^\intercal}$.

14 ▷ Si p possède une racine stable α_i. Alors $\alpha_i \neq 0$ et $p(\alpha_i) = p(1/\alpha_i) = 0$. Il existe donc k, i tel que $\alpha_k = 1/\alpha_i$.

- Si $i = k$ alors : $\alpha_i^2 = 1$, donc $\alpha_i = \pm 1$.

  La matrice diagonale D admet un coefficient diagonal $D_{ii} = 1 - \alpha_i^2 = 0$ donc elle est de rang au plus $n-1$.
  Or $J(p) = VDV^\intercal$ donc :

$$\operatorname{rang}(J(p)) \leq \min(\operatorname{rang}(V), \operatorname{rang}(D)) \leq \operatorname{rang}(D) \leq n-1,$$

  et $J(p)$ n'est pas inversible.

- Si $k \neq i$, d'après Q6, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée, $\exists (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$.

  Alors $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j(S^\intercal) = 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j(S^\intercal)U = 0$, donc $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j V_j = 0$.
  Les colonnes de $V = \left[\begin{array}{c|c|c} V_1 & \ldots & V_n \end{array}\right]$ sont liées. Donc V n'est pas inversible par suite $\boxed{J(p) \text{ n'est pas inversible.}}$

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15 ▷ Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^\intercal B P$.
Soit F un s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $d(A)$ vérifiant $(\mathcal{C}_A)$. Pour tout $X \in F \setminus \{0\}$, $X^\intercal A X > 0$.
Soit $G = P(F) = \{PX \mid X \in F\}$. G est un s.e.v. de $\dim G = \dim F = d(A)$.
Prenons $Y \in G \setminus \{0\}$, alors $Y = PX$ pour un $X \in F \setminus \{0\}$, on a

$$Y^\intercal B Y = (PX)^\intercal B \ (PX) = X^\intercal \ P^\intercal B P \ X = X^\intercal A X$$

Donc $Y^\intercal B Y > 0$ et G vérifie la condition $(\mathcal{C}_B)$.
Par définition de $d(B)$, on a $\dim G \leq d(B)$, donc $d(A) \leq d(B)$. Soit $Q = P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $B = Q^\intercal A Q$.
Le même raisonnement montre que $d(B) \leq d(A)$.
Finalement, $\boxed{d(A) = d(B).}$

16 ▷ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, M est diagonalisable dans une base orthonormée : $M = QDQ^\intercal$ avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\pi(M)$ le nombre de $\lambda_i > 0$. Quitte a permuter les indices, supposons $\lambda_i > 0$ pour $i \in [\![1, \pi(M)]\!]$. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, formée des vecteurs propres de M (ce sont les colonnes de Q), donc $V_i^T V_j = \delta_{i,j}$.
Soit $F_M = \mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_{\pi(M)})$, $\dim F_M = \pi(M)$ et $X = \sum\limits_{i=1}^{\pi(M)} c_i V_i \in F_M \setminus \{0\}$, alors

$$\begin{aligned}
X^\intercal M X &= \left(\sum_{i=1}^{\pi(M)} c_i V_i^\intercal\right)\left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} c_j M V_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\pi(M)} c_i V_i^\intercal\right)\sum_{j=1}^{\pi(M)} c_j \lambda_j V_j \\
&= \sum_{i=1}^{\pi(M)}\sum_{j=1}^{\pi(M)} c_i c_j \lambda_j (V_i^\intercal V_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\pi(M)} c_i^2 \lambda_i.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_i > 0$ pour $i \in [\![1, \pi(M)]\!]$ et les $c_i^2 \geq 0$ et non tous nuls, alors $X^\intercal M X > 0$.
F_M vérifie $(\mathcal{C}_M)$. Donc $\boxed{d(M) \geq \dim F_M = \pi(M).}$

17 ▷ Supposons par l'absurde qu'il existe G un s.e.v tel que $\dim G > \pi(M)$ et G vérifie $(\mathcal{C}_M)$.
On a $F_M^{\perp} = \mathrm{Vect}(V_{\pi(M)+1}, \dots, V_n)$, et pour tout $Y = \sum\limits_{i=\pi(M)+1}^{n} d_i V_i \in F_M^{\perp} \setminus \{0\}$,

$$Y^{\intercal} M Y = \sum_{i=\pi(M)+1}^{n} d_i^2 \lambda_i \leq 0.$$

Comme

$$\dim(G + F_M^{\perp}) = \dim G + \dim F_M^{\perp} - \dim(G \cap F_M^{\perp}) \leq n.$$

alors

$$\begin{aligned} \dim(G \cap F_M^{\perp}) &\geq \dim G + \dim F_M^{\perp} - n \\ &> \pi(M) + (n - \pi(M)) - n = 0. \end{aligned}$$

Donc $\dim(G \cap F_M^{\perp}) \geq 1$. Il existe $X \in G \cap F_M^{\perp}$ avec $X \neq 0$.
$X \in G \setminus \{0\}$ donc $X^{\intercal} M X > 0$ et $X \in F_M^{\perp} \setminus \{0\}$ donne $X^{\intercal} M X \leq 0$. Contradiction.
Donc $\boxed{d(M) = \pi(M).}$

18 ▷ Si $J(p)$ est inversible, d'après Q14 (contraposée), p ne possède aucune racine stable. On a $J(p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
D'après Q13, on a $J(p) = VDV^{\intercal}$, avec $D = \mathrm{Diag}(1-\alpha_1^2, \dots, 1-\alpha_n^2)$. Comme $J(p)$ est inversible alors V et D sont inversible (par le det). D'après Q15, $d(J(p)) = d(D)$, et d'après Q17, $d(J(p)) = \pi(J(p))$ et $d(D) = \pi(D)$.
Donc $\pi(J(p)) = \pi(D)$.
$\pi(D)$ est le nombre d'éléments diagonaux $1 - \alpha_j^2$ qui sont strictement positifs . Puisque

$$1 - \alpha_j^2 > 0 \iff \alpha_j^2 < 1 \iff -1 < \alpha_j < 1.$$

$\pi(D)$ est donc le nombre de racines α_j de p dans $]-1, 1[$, c'est $\sigma(p)$. Ainsi $\boxed{\sigma(p) = \pi(J(p))}$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Supposons p sans racine stable et $J(p)$ non inversible. D'après Q13 $J(p) = VDV^{\intercal}$, donc

$$\det(J(p)) = (\det V)^2 \det D = 0 \; .$$

Et on a

$$\det D = \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2).$$

Comme $\alpha_j \neq \pm 1$, $\det D \neq 0$ donc $\det V = 0$ et V n'est pas inversible.
Ses colonnes $V_j = f_j(S^{\intercal})U$ sont donc liées, $\exists (c_1, \dots, c_n) \neq 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j V_j = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(S^{\intercal}) U = 0.$$

Soit $q(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j f_j(X)$. On a $\deg q \leq n - 1$, d'après Q9 la famille de polynômes $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ est libre et $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ donc $q \neq 0$. Et q vérifie $q(S^{\intercal})U = 0_{n,1}$.

20 $\triangleright$ $\boxed{\Rightarrow}$ Si $J(p)$ est inversible.

Par la contraposée de Q14 p n'a pas de racine stable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si p n'a pas de racine stable.

Supposons $J(p)$ non inversible. D'après Q19, $\exists q \neq 0$, $\deg q \leq n-1$, tel que $q(S^\intercal)U = 0$.

Posons $q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ avec $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \neq 0$. On a d'après Q10

$$q(S^\intercal)U = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left((S^\intercal)^k U\right) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k e_{k+1}.$$

ce qui donne

$$q(S^\intercal)U = 0 \implies b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0.$$

Donc $q = 0$, contradiction .

Donc si p n'a pas de racine stable, $J(p)$ est inversible.

Conclusion : $\boxed{J(p) \text{ est inversible } \iff p \text{ n'admet aucune racine stable}}$.

F. Un cas particulier

On suppose que p a des racines stables α_j, toutes de multiplicité .

21 $\triangleright$ $h = Xp'$. D'après Q5, h n'admet pas de racine stable et d'après Q20, $J(h)$ est inversible .

22 $\triangleright$ Soit $r \in]0,1[$ et $p_r(X) = p(rX)$.

- Les racines de p sont stables et simples, donc p admet des racines dans $]-1,1[$ posons $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ l'ensemble des racines de p dans $]-1,1[$, avec $k = \sigma(p)$. L'ensemble des racines de p est donc $\{\alpha_1, 1/\alpha_1 ..., \alpha_k, 1/\alpha_k\}$ et l'ensemble des racines de p_r est $\left\{\alpha_1/r, 1/(r\alpha_1)..., \alpha_k/r, 1/(r\alpha_k)\right\}$.

- Soit $\mu = \max\{|\alpha_1|, ..., |\alpha_k|\} \in]0,1[$.

  Si $r \in]\mu, 1[$ alors $|\alpha_j/r| < 1$ et $1/|r\alpha_j| > 1$, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, donc $\sigma(p_r) = \sigma(p)$.

- Absence de racines stables pour p_r :

  Une racine $\beta_j = \alpha_j/r$ de p_r est stable si $p_r(1/\beta_j) = 0$ ($\beta_j \neq 0$ car $\alpha_j \neq 0$) . On a

  $$p_r(1/\beta_j) = p(r^2/\alpha_j) = 0.$$

  donc il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i = r^2/\alpha_j$, c.a.d $r^2 = \alpha_i\alpha_j$.

  Donnons une condition pour que $r^2 \notin S$ avec $S = \{\alpha_j\alpha_k \mid j,k \in [\![1,n]\!]\}$.

  Comme les racines de p sont stables, alors $1 \in S$, donc S est fini et non vide .

  Il suffit que $\max(S \cap [0,1[) < r^2 < 1$ pour avoir $r^2 \notin S$.

  Soit $\lambda = \sqrt{\max(S \cap [0,1[)}$. Ainsi, si $r \in]\lambda, 1[$ alors p_r n'admet pas de racines stables .

- Conclusion :

  Posons $\eta = 1 - \max(\lambda, \mu)$. On a $\eta \in]0,1[$ et pour tout $r \in]1-\eta, 1[$, p_r est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, p_r admet exactement $\sigma(p_r) = \sigma(p)$ racines dans $]-1,1[$ et p_r ne possède aucune racine stable.

23 ▷ $F(r) = J(p(rX)) = J(p_r) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ elle admet donc n valeurs propres réelles non nulles .

Pour $r \in]1-\eta, 1[$, p_r n'a pas de racine stable, donc $J(p_r)$ est inversible.

D'après Q18 on a $\pi(F(r)) = \pi(J(p_r)) = \sigma(p_r) = \sigma(p)$.

Soit $M(r) = \frac{n}{2(r-1)}F(r)$. On a $r-1<0$, donc $\pi(M(r))$ est le nombre de de valeurs propres strictement negatives de $F(r)$.

Donc

$$\pi(M(r)) = n - \pi(F(r)).$$

On a

$$\lim_{r\to 1^-} \pi(F(r)) = \lim_{r\to 1^-} \sigma(p_r) = \sigma(p).$$

et

$$\lim_{r\to 1^-} \pi(M(r)) = n - \lim_{r\to 1^-} \pi(F(r)) = n - \sigma(p).$$

d'où $\boxed{\lim_{r\to 1^-} \pi(\frac{n}{2(r-1)}F(r)) = n - \sigma(p).}$

24 ▷ La fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$F(r) = J(p_r) = (p_r)_0(S^\intercal)(p_r)_0(S) - p_r(S^\intercal)p_r(S).$$

- On a :

$$(p_r)_0(X) = X^n p(r/X) = r^n\big((X/r)^n p(r/X)\big) = r^n p_0(X/r)$$

  comme $p = \lambda p_0$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, donc

$$(p_r)_0(X) = \lambda r^n p(X/r)$$

- L'expression de F devient :

$$F(r) = \lambda^2 r^{2n} p(\tfrac{1}{r}S^\intercal)p(\tfrac{1}{r}S) - p(rS^\intercal)p(rS) = r^{2n}p(\tfrac{1}{r}S^\intercal)p(\tfrac{1}{r}S) - p(rS^\intercal)p(rS).$$

  La fonction F polynomiale donc elle est $\mathcal{C}^\infty$.

  Rappelons que :
  Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :
  $\frac{d}{dt}(P(t.A)) = AP'(t.A)$ et $\frac{d}{dt}\left(P(\frac{1}{t}.A)\right) = -\frac{1}{t^2}AP'(\frac{1}{t}.A)$

- La formule de Taylor Young, à l'ordre 1, appliquée au voisinage de 1 donne .

$$r^{2n} = 1 + 2n(r-1) + o(r-1)$$
$$p(rS) = p(S) + (r-1)Sp'(S) + o(r-1)$$
$$p(\tfrac{1}{r}S) = p(S) - (r-1)Sp'(S) + o(r-1)$$

Donc

$$
\begin{aligned}
p(rS^\intercal)p(rS) &= p(S^\intercal)p(S) + (r-1)\left(p(S^\intercal)Sp'(S) + p(S)S^\intercal p'(S^\intercal)\ \right) + o(r-1)\\
r^{2n}p(\tfrac{1}{r}S^\intercal)p(\tfrac{1}{r}S) &= p(S^\intercal)p(S) + (r-1)\Big(2np(S^\intercal)p(S) - p(S^\intercal)Sp'(S) - p(S)S^\intercal p'(S^\intercal)\ \Big) + o(r-1)
\end{aligned}
$$

Par suite

$$F(r) = 2(r-1)\left(np(S^\intercal)p(S) - p(S^\intercal)Sp'(S) - p(S)S^\intercal p'(S^\intercal)\ \right) + o(r-1)$$

Sachant que $F(r) = F(1) + (r-1)F'(1) + o(r-1)$ donc $F(1) = 0$ et

$$F'(1) = 2np(S^\intercal)p(S) - 2p(S^\intercal)Sp'(S) - 2p(S)S^\intercal p'(S^\intercal),$$

par commutativité on a $\boxed{F'(1) = 2n\,(p(S))^\intercal\, p(S) - 2S^\intercal p(S)\,(p'(S))^\intercal - 2\,(p(S))^\intercal\, p'(S)S\ }$.

25 ▷ Calcul de $J(h)$:

Rappelons $h = Xp'$ et, d'après la question 4, $h_0 = \lambda(np - Xp')$. On a

$$
\begin{aligned}
J(h) &= h_0(S^T)h_0(S) - h(S^T)h(S)\\
&= \lambda^2[np(S^T) - S^Tp'(S^T))][np(S) - Sp'(S))] - [Sp'(S)S^Tp'(S^T)]
\end{aligned}
$$

Puisque $\lambda^2 = 1$, et après simplification :

$$J(h) = n^2\ p\left(S^T\right)\ p(S) - n\ p\left(S^T\right)\ S\ p'(S) - n\ S^T\ p'\ \left(S^T\right)\ p(S) = \frac{n}{2}F'(1).$$

La formule de Taylor Young en 1 s'écrit

$$F(r) = (r-1)F'(1) + o(r-1) = F(r) = \frac{2(r-1)}{n}J(h) + o(r-1)$$

Ainsi $\boxed{\lim_{r\to 1^-} \frac{n}{2(r-1)}F(r) = J(h).}$

26 ▷ On admet la continuité de l'application $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ qui à une matrice symétrique M associe $(\lambda_1(M), \lambda_2(M), \ldots, \lambda_n(M))$ (*le n-uplet de ses valeurs propres réelles* $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \cdots \geq \lambda_n(M)$).

Supposons M est inversible, on choisit la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ telle que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\|M - A\| < \eta$ alors $\max_i(|\lambda_i(M) - \lambda_i(A)|) < \varepsilon$.

Donc pour ε assez petit (*par exemple* $\varepsilon < \frac{1}{2}\min_i|\lambda_i(M)|$), pour tout i on a : $\lambda_i(M)$ et $\lambda_i(A)$ ont même signe .

Donc la fonction $\pi(M)$ compte le nombre de valeurs propres strictement positives de M est constante sur un voisinage de M.

D'après Q21, la matrice $J(h)$ est inversible, donc pour r assez petit $\pi\left(J(h) + o(1)\right) = \pi\left(J(h)\right)$.

D'après Q18

$$\pi\left(J(h)\right) = \sigma(h) = \sigma(Xp') = 1 + \sigma(p')$$

On a $\dfrac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1^-}{\to} J(h)$, donc pour $0 < r < 1$ proche de 1, on a $\pi(\dfrac{n}{2(r-1)}F(r)) = \pi(J(h))$.

D'après Q23, $\lim\limits_{r\to 1^-} \pi(\dfrac{n}{2(r-1)}F(r)) = n - \sigma(p)$.

Donc $n - \sigma(p) = \pi(J(h))$. Ainsi

$$n - \sigma(p) = 1 + \sigma(p')$$

D'après Q5, p' est scindé et n'a pas de racines stables, la Q18 donne $\sigma(p') = \pi(J(p'))$,on en déduit que $\boxed{\sigma(p) = n-1-\sigma(p') = n-1-\pi(J(p'))}$.

G. Méthode générale.

Soit p un polynôme réel, scindé sur $\mathbb{R}$, degré n, on pose $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 ▷ Les racines de f et de $g = p/f$ sont les racines de p.

Une racine α de f est racine commune à p et à p_0, donc forcément $\alpha \neq 0$ et elle est racine stable de p.

Puisque $p = fg$, les racines de g sont les racines de p qui ne sont pas racines de f. Donc les racines de g sont exactement les racines non stables de p.

Par conséquent g n'a pas de racine stable.

D'après Q20, $J(g)$ est inversible et d'après Q18 (Critère de Schur-Cohn) on a $\boxed{\sigma(g) = \pi(J(g))}$.

28 ▷ On sait que si α est une racine de f d'ordre de multiplicité k, alors c'est une racine de f' d'ordre de multiplicité $k-1$.

Par conséquent les racines de $\frac{f}{\text{pgcd}(f,f')}$ sont exactement les racines de f de multiplicité 1 .

Comme toutes les racines de f sont stables donc les racine de $\frac{f}{\text{pgcd}(f,f')}$ le sont aussi .

Posons $f_1 = \text{pgcd}\,(f, f')$ et $g_1 = \dfrac{f}{\text{pgcd}\,(f, f')}$.

Les racines de g_1 sont stables et de multiplicité 1. Par récurrence on construit les familles $(f_1, \ldots, f_\ell)$ et $(g_1, \ldots, g_\ell)$ par :

$f_{k+1} = \text{pgcd}\,(f_k, f_k')$ et $g_{k+1} = \dfrac{f_k}{f_{k+1}}$, $k \in [\![1, \ell-1]\!]$ avec $f_\ell = 1$.

Pour toit $k \in [\![1, \ell]\!]$, les racines de g_k sont donc stables et de multiplicité 1 .

On a

$$g_1 \ldots g_\ell = \frac{f}{f_1}\frac{f_1}{f_2}\ldots\frac{f_{\ell-1}}{f_\ell} = \frac{f}{f_\ell} = f$$

D'après Q26, $\sigma\left(g_k\right) = \left(\deg\left(g_k\right) - 1 - \pi\left(J\left(g_k'\right)\right)\right)$ pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$ donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \sum_{k=1}^{\ell} \sigma\left(g_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \left(\deg\left(g_k\right) - 1 - \pi\left(J\left(g_k'\right)\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \deg\left(g_k\right) - \ell - \sum_{k=1}^{\ell} \pi\left(J\left(g_k'\right)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma(p) &= \sigma(f) + \sigma(g) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \deg\left(g_k\right) - \ell - \sum_{k=1}^{\ell} \pi\left(J\left(g_k'\right)\right) + \pi(J(g)) \\
&= \deg(f) - \ell - \sum_{k=1}^{\ell} \pi\left(J\left(g_k'\right)\right) + \pi(J(g))
\end{aligned}$$

Comme $\deg(f) = \deg(p) - \deg(g)$, alors

$$\sigma(p) = n - \ell - \deg(g) - \sum_{k=1}^{\ell} \pi\left(J\left(g_k'\right)\right) + \pi(J(g))$$

FIN DU CORRIGÉ