

Un corrigé de Maths 2 CCP PSI 2012

Rodolphe Garin

10 Mai 2012

PARTIE I

I.1) Il est clair que P est le point d'intersection de l'axe des abscisses et du cercle de centre O et de rayon 1, Q (respectivement R) est le point d'intersection de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et du cercle de centre O et de rayon 1 situé au-dessus (respectivement en dessous) de l'axe des abscisses donc on laisse au lecteur le soin de construire T et D .

-) déterminons une équation cartésienne de la droite (PQ) :

le point $M(x, y)$ appartient à la droite (PQ) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires donc $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})$ est une famille liée soit $\begin{vmatrix} x-1 & -\frac{3}{2} \\ y & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 1 = 0$, ainsi une équation cartésienne de la droite (PQ) est $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.

-) déterminons une équation cartésienne de la droite (PR) :

le point $M(x, y)$ appartient à la droite (PR) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires donc $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})$ est une famille liée soit $\begin{vmatrix} x-1 & -\frac{3}{2} \\ y & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - 1 = 0$, ainsi une équation cartésienne de la droite (PR) est $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$.

-) déterminons une équation de la droite (QR) : comme les points Q et R sont distincts et de même abscisse $-\frac{1}{2}$ alors une équation de (QR) est $x + \frac{1}{2} = 0$ ou $2x + 1 = 0$.

Notons $\Pi_{(PQ)}^O$ (respectivement $\Pi_{(PR)}^O$ et $\Pi_{(QR)}^O$) le demi-plan ouvert contenant O défini par la droite (PQ) (respectivement (PR) et (QR)) ; alors $\Pi_{(PQ)}^O$ (respectivement $\Pi_{(PR)}^O$ et $\Pi_{(QR)}^O$) est défini par $x + \sqrt{3}y - 1 < 0$ (respectivement $x - \sqrt{3}y - 1 < 0$ et $2x + 1 > 0$). Or $M(x + iy) \in T$ si, et seulement si $M \in \Pi_{(PQ)}^O \cap \Pi_{(PR)}^O \cap \Pi_{(QR)}^O$ donc si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités : $2x + 1 > 0$, $x - \sqrt{3}y - 1 < 0$, $x + \sqrt{3}y - 1 < 0$.

I.2.1) On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ alors 1 est valeur propre de A .

I.2.2) Puisque A est d'ordre 3 alors 1, λ et $\bar{\lambda}$ sont simples donc $\text{tr}(A) = 1 + \lambda + \bar{\lambda} = 1 + 2a$ et $\text{tr}(A^2) = 1^2 + \lambda^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 + 2(a^2 - b^2)$.

I.2.3) Par définition $\text{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ donc puisque A vérifie la propriété $(ST > 0)$ alors $\text{tr}(A) > 0$. De même $\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i,j} a_{j,i} > \sum_{i=1}^3 a_{i,i}^2$ car A vérifie la propriété $(ST > 0)$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\text{tr}(A))^2 = (1 \times a_{1,1} + 1 \times a_{2,2} + 1 \times a_{3,3})^2 \leq \left(\sum_{i=1}^3 1^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^3 a_{i,i}^2 \right) < 3 \text{tr}(A^2)$.

I.2.4) En utilisant les questions I.2.2 et I.2.3 on a d'une part $2a + 1 = \text{tr}(A) > 0$ et d'autre part $(1 + 2a)^2 = (\text{tr}(A))^2 < 3 \text{tr}(A^2) = 3(1 + 2a^2 - 2b^2) \Leftrightarrow 0 < a^2 - 2a + 1 - 3b^2 =$

$$(a-1)^2 - 3b^2 = (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1).$$

I.2.5) En suivant les indications de l'énoncé et la question précédente il suffit de prouver que $M(\lambda)$ n'appartient pas à la région de D limitée par la droite (PQ) et l'arc $\widehat{PQ}$, ce qui est vrai car $M(x + iy)$ appartient à cette région si, et seulement si $x + \sqrt{3}y - 1 > 0$ et $x - \sqrt{3}y - 1 < 0$ donc $(x + \sqrt{3}y - 1)(x - \sqrt{3}y - 1) < 0$, ainsi qu'à la région de D limitée par la droite (PR) et l'arc $\widehat{RP}$, ce qui est vrai car $M(x + iy)$ appartient à cette région si, et seulement si $x + \sqrt{3}y - 1 < 0$ et $x - \sqrt{3}y - 1 > 0$ donc $(x + \sqrt{3}y - 1)(x - \sqrt{3}y - 1) < 0$, donc $M(\lambda) \in T$.

On peut aussi procéder comme suit: d'après la question précédente $a - \sqrt{3}b - 1$ et $a + \sqrt{3}b - 1$ ont même signe donc si $a - \sqrt{3}b - 1 > 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 > 0$ alors $a^2 - 3b^2 > 1 > a^2 + b^2 \Rightarrow -4b^2 > 0$ ce qui est absurde donc $a - \sqrt{3}b - 1 < 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 < 0$ ce qui assure en utilisant I.2.4 que $M(\lambda) \in T$.

I.3.1) On a $j^2 = \bar{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{3}} = -e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc $2r \cos(\theta) = 2 \operatorname{Re}(\lambda) = \lambda + \bar{\lambda}$, $2r \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = 2 \operatorname{Re}(\lambda j) = j\lambda + j^2 \bar{\lambda}$, $-2r \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2 \operatorname{Re}(j^2 \lambda) = j^2 \lambda + j \bar{\lambda}$.

Ainsi

$$\alpha = \frac{1+\lambda+\bar{\lambda}}{3}, \beta = \frac{1+j\lambda+j^2\bar{\lambda}}{3}, \gamma = \frac{1+j^2\lambda+j\bar{\lambda}}{3}.$$

I.3.2) Comme $M(\lambda) \in T$ alors d'après la question I.1, on a $3\alpha = 2 \operatorname{Re}(\lambda) + 1 > 0 \Rightarrow \alpha > 0$, $1 - r \cos(\theta) - \sqrt{3}r \sin(\theta) = 3\beta > 0 \Rightarrow \beta > 0$ et $1 - r \cos(\theta) + \sqrt{3}r \sin(\theta) = 3\gamma > 0 \Rightarrow \gamma > 0$. Enfin en utilisant l'égalité $1 + j + j^2 = 0$ on a $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3}(3 + (\lambda + \bar{\lambda})(1 + j + j^2)) = 1$. Ainsi A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

I.3.3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à J , alors si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{K}^3$ on a $f(e_1) = e_3, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2$ d'où $f^2(e_1) = e_2, f^2(e_2) = e_3, f^2(e_3) = e_1, f^3(e_1) = e_1, f^3(e_2) = e_2, f^3(e_3) = e_3$ ce qui donne

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^3 = I_3. \text{ Comme } J^3 - I_3 = 0 \text{ alors } X^3 - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } J \text{ donc puisque les racines de ce dernier polynôme est } 1, j \text{ et } j^2, \text{ alors } Sp_{\mathbb{C}}(J) \subset \{1, j, j^2\}.$$

On a $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de J et J étant à coefficients réels alors $Sp_{\mathbb{C}}(J) = \{1\}$ ou $\{1, j, j^2\}$. Puisque $\operatorname{tr}(J) = 0$ alors $Sp_{\mathbb{C}}(J) \neq \{1\}$ donc $Sp_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\}$.

I.3.4) On a $A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2$ donc si $\mathcal{P}(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ alors $\mathcal{P}(J) = A$. Ainsi d'après la question précédente, $\mathcal{P}(1) = 1, \mathcal{P}(j) = \alpha + \beta j + \gamma j^2 = \bar{\lambda}$ et $\mathcal{P}(j^2) = \alpha + \beta j^2 + \gamma j = \lambda$ sont des valeurs propres de A d'où puisque A est d'ordre 3, alors 1, λ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres de A .

PARTIE II

II.1) Compte tenu des hypothèses $AU = U$ et $U \neq 0$ ce qui assure que 1 est valeur propre de A .

II.2.1) Puisque $BX = 0$ alors $\sum_{j=1}^n b_{k,j} x_j = 0 \Rightarrow b_{k,k} x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n b_{k,j} x_j \Rightarrow |b_{k,k}| |x_k| \leq$

$\sum_{j=1, j \neq k}^n |b_{k,j}| |x_j|$. Puisque $X \neq 0$ alors $|x_k| \neq 0$ et par définition de k , on a $\frac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$ d'où

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |b_{k,j}|.$$

II.2.2) Comme $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$ donc d'après la question précédente,

$$\text{on a } |a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} = \sum_{j=1}^n a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}.$$

De l'inégalité précédente on a $2a_{k,k} - 1 \leq \lambda \leq 1$, et comme $a_{k,k} > 0 \Rightarrow -1 < 2a_{k,k} - 1$ alors $-1 \leq \lambda \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$.

II.2.3) D'après la question précédente, $|a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 = (a_{k,k} - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = 1 + a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} \cos(\theta) \leq (1 - a_{k,k})^2 = 1 + a_{k,k}^2 - 2a_{k,k}$
 $\Rightarrow 0 \leq 2a_{k,k}(1 - \cos(\theta)) \leq 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 1$ car $a_{k,k} > 0$ donc $\theta = 2k\pi \Rightarrow \lambda = 1$.

II.3.1) Par propriété du déterminant on a $\det({}^t A - I_n) = \det({}^t(A - I_n)) = \det(A - I_n) = 0$ ce qui assure que $1 \in Sp_{\mathbb{C}}({}^t A)$. De même $rg({}^t A - I_n) = rg(A - I_n)$ d'où par le théorème du rang $\dim E_1(A) = n - rg(A - I_n) = n - rg({}^t A - I_n) = \dim E_1({}^t A)$.

II.3.2) On a ${}^t AV = V$ donc $\forall i \in [[1, n]], v_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} v_j \Rightarrow |v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$.

S'il existe $p \in [[1, n]]$ tel que $|v_p| < \sum_{j=1}^n a_{j,p} |v_j|$ alors $\sum_{i=1}^n |v_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{j,i} \right) |v_j| = \sum_{j=1}^n |v_j|$ ce qui est absurde donc toutes les inégalités sont des égalités.

Dès lors $\forall i \in [[1, n]], |v_i| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$ donc ${}^t A|V| = |V|$ et donc $V \neq 0 \Rightarrow$ il existe

$p \in [[1, n]]$ tel que $|v_p| > 0$ d'où $\forall i \in [[1, n]], |v_i| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| > a_{p,i} |v_p| > 0$.

II.3.3) Puisque $Y \neq 0$ alors d'après la question précédente $y_1 \neq 0$, et en posant $Z =$

$$X - \frac{x_1}{y_1} Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ . \\ z_n \end{pmatrix} \text{ on a d'une part } z_1 = 0 \text{ et d'autre part } Z \in E_1({}^t A) \text{ donc d'après}$$

la question précédente $Z = 0 \Rightarrow X = \frac{x_1}{y_1} Y \Rightarrow \dim E_1({}^t A) \leq 1$. Ainsi comme $\dim E_1({}^t A) \geq 1$ on a $\dim E_1({}^t A) = 1$. D'après la question précédente on peut considérer

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in E_1({}^t A), x_i > 0, \text{ d'où en posant } s = \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } \Omega = \frac{1}{s} X = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ . \\ \omega_n \end{pmatrix} \text{ on}$$

a $\forall i \in [[1, n]], \omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. S'il existe $\Omega' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ . \\ \omega'_n \end{pmatrix}$ vérifiant les mêmes con-

ditions puisque $\dim E_1({}^t A) = 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega' = \alpha \Omega \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^n \omega'_i =$

$$\alpha \sum_{i=1}^n \omega_i = \alpha \text{ d'où } \Omega' = \Omega. \text{ Puisque } {}^t A \Omega = \Omega \text{ alors } \forall i \in [[1, n]], \omega_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j.$$

II.3.4) Dans les questions précédentes on a prouvé que 1 est valeur propre de A et le sous-espace associé est de dimension 1, et que les autres valeurs propres sont de module stricte-

ment inférieure à 1.

II.4) Soit u l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par $u \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = (\omega_1 x_1, \dots, \omega_n x_n)$,

alors u est linéaire et en utilisant la question II.3.3 on prouve que u est injective donc si $\|\cdot\|_1$ est la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ comme $N = \|\cdot\|_1 \circ u$ alors

N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et en posant $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \Rightarrow$

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i \right) |x_j| = \sum_{j=1}^n \omega_j |x_j| = N(X).$$

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ donc il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc $|\lambda| N(X) = N(AX) \leq N(X) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$ car $X \neq 0 \Rightarrow N(X) > 0$.

II.5.1) En posant $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \Rightarrow$

$$\Phi(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i \right) x_j = \sum_{j=1}^n \omega_j x_j = \Phi(X).$$

II.5.2) Avec les notations de II.1 $\Phi(U) = 1$ donc Φ est une forme linéaire non nulle donc $\dim \ker(\Phi) = n - 1 \Rightarrow \dim E_1(A) + \dim \ker(\Phi) = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et d'autre part $X \in E_1(A) \cap \ker(\Phi) \Rightarrow X = \alpha U, 0 = \Phi(X) = \alpha \Phi(U) = \alpha \Rightarrow X = 0$ ce qui assure que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$.

II.5.3) Comme $AX = \lambda X$ alors d'après la question II.5.1, $\Phi(X) = \Phi(AX) = \lambda \Phi(X) \Rightarrow (1 - \lambda) \Phi(X) = 0 \Rightarrow \Phi(X) = 0$ car $\lambda \neq 1$.

II.5.4) En considérant une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ adaptée à la décomposition donnée par II.5.2 et en remarquant que $\ker(\Phi)$ est stable par d'après II.5.1, on obtient que A est semblable à

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}, B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_A(X) = (1 - X) \chi_{B'}(X). \text{ Comme } E_1(A) \cap \ker(\Phi) = \{0\} \text{ alors } 1 \text{ n'est pas racine de } \chi_{B'} \text{ donc on conclut que l'ordre de multiplicité de la valeur propre } 1 \text{ de } A \text{ est } 1.$$