

CORRIGÉ du SUJET

“Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$ ”

I. Nombre de points fixes d’une permutation.

1. Comme $\text{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$, on a $0 \leq d_n \leq n!$, donc $\left| \frac{d_n}{n!} \right| \leq 1$. On en déduit que $R \geq R'$, où $R' = 1$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$.

2. Pour construire une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant k points fixes, on choisit l’ensemble A de ses points fixes, de cardinal k , il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles. Ensuite, on choisit un dérangement du complémentaire $B = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$, et il y a d_{n-k} possibilités. Le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant exactement k points fixes est donc $\binom{n}{k} d_{n-k}$.

L’univers $\mathcal{S}_n$, de cardinal $n!$, étant muni de la probabilité uniforme P_n , on a donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P_n(X_n = k) = \frac{|\{X_n = k\}|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k! (n-k)!}.$$

3. Comme s et $x \mapsto e^x$ sont développables en série entière sur $] -1, 1[$, par produit de Cauchy, on obtient sur cet intervalle

$$\begin{aligned} s(x) e^x &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d_p}{p!} x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k! (n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P_n(X_n = k) \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in] -1, 1[$, on a $s(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = +\infty$, on ne peut pas prolonger s en une fonction continue sur $] -R, R[$ avec $R > 1$. On en déduit que $R = 1$.

4. Pour $x \in] -1, 1[$, on a donc $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ soit, après réorganisation du premier membre,

$$d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Par identification (unicité du développement en série entière), on retrouve $d_0 = 1$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Changeons de notations: fixons $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$. En sommant ces inégalités et en observant le télescopage dans le membre de gauche, il vient

$$\frac{d_n}{n!} - d_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Comme $d_0 = 1$, on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

6. Comme $U_i(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$, U_i est une variable de Bernoulli dont le paramètre est

$$P_n(U_i = 1) = P_n(\sigma(i) = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

En effet, il y a autant de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixant l'élément i que de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, soit $(n-1)!$. Donc $U_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ prend aussi ses valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est donc encore une variable de Bernoulli, et son paramètre est

$$P_n(U_i U_j = 1) = P_n(U_i = 1, U_j = 1) = P_n(\sigma(i) = i, \sigma(j) = j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

En effet, ici aussi, si $i \neq j$, il y a autant de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixant les éléments i et j que de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, soit $(n-2)!$.

7. Il est immédiat que $X_n = \sum_{i=1}^n U_i$.

De la question précédente, on déduit que $E(U_i) = \frac{1}{n}$ et $V(U_i) = \frac{n-1}{n^2}$.

Par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(U_i) = n \frac{1}{n} = 1$.

Ensuite, $V(X_n) = V\left(\sum_{i=1}^n U_i\right) = \sum_{i=1}^n V(U_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(U_i, U_j)$.

Et, pour $i \neq j$, on a $\text{Cov}(U_i, U_j) = E(U_i U_j) - E(U_i)E(U_j)$. Or, $E(U_i U_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ d'après

la question précédente, ce qui donne $\text{Cov}(U_i, U_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Comme il y a $n(n-1)$ couples (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on termine le calcul:

$$V(X_n) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} = 1.$$

8. On a $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{k!}$.

On reconnaît la distribution de probabilités d'une loi de Poisson de paramètre 1, donc $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

9. D'après le cours (ou par un calcul immédiat), on a $G_Y(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) s^k = e^{s-1}$, la série entière ayant un rayon de convergence infini. D'autre part, comme X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, sa fonction génératrice est polynomiale, on a pour tout s réel,

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{k=0}^n P_n(X_n=k) s^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=k}^n \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \right) s^k && \text{translation d'indice} \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} s^k \right) && \text{intersion des sommes} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(s-1)^j}{j!} . \end{aligned}$$

On observe bien que, pour tout s réel fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{X_n}(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(s-1)^j}{j!} = e^{s-1} = G_Y(s)$.

II. Convergence en variation totale.

10. Pour tout k , on a $|x(k) - y(k)| \leq |x(k)| + |y(k)| = x(k) + y(k)$. Comme les séries $\sum_{k \geq 0} x(k)$

et $\sum_{k \geq 0} y(k)$ convergent et ont pour somme 1, par comparaison de séries à termes positifs,

on déduit la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} |x(k) - y(k)|$ et la majoration de sa somme par 2.

Il est clair, au passage, qu'une distribution de probabilités prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Donc $d_{VT}(x, y)$ existe et appartient à $[0, 1]$.

Si $x = y$, alors $d_{VT}(x, y) = 0$. Réciproquement, comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, si $d_{VT}(x, y) = 0$, alors $|x(k) - y(k)| = 0$ pour tout k , donc $x = y$ (axiome de séparation).

La symétrie $d_{VT}(y, x) = d_{VT}(x, y)$ est immédiate.

Enfin pour l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned} 2 d_{VT}(x, z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - z(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x(k) - y(k)) + (y(k) - z(k))| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|) = 2 (d_{VT}(x, y) + d_{VT}(y, z)) . \end{aligned}$$

11. On a ici

$$2 d_{VT}(p_X, p_Y) = |p_X(0) - p_Y(0)| + |p_X(1) - p_Y(1)| = |(1-\lambda) - (1-\mu)| + |\lambda - \mu| = 2 |\lambda - \mu| ,$$

donc $d_{VT}(x, y) = |\lambda - \mu|$.

12. Puisque $p_X(k)$ est nul pour $k \geq 2$, on calcule

$$\begin{aligned} 2 d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) &= |p_X(0) - \pi_\lambda(0)| + |p_X(1) - \pi_\lambda(1)| + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) \\ &= |1 - \lambda - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} - (1 - \lambda) + \lambda(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda}(e^\lambda - 1 - \lambda). \end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité $e^{-\lambda} \geq 1 - \lambda$ qui résulte de la convexité de la fonction exponentielle.

Après simplifications, il reste $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$.

Avec le même argument de convexité, $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$, donc $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$.

13. Il suffit d'appliquer la définition, sachant que $p_{X_n}(k)$ est nul pour $k > n$:

$$\begin{aligned} 2 d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) &= \sum_{k=0}^n |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \pi_1(k) \\ &= \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{e^{-1}}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} r_n, \end{aligned}$$

où l'on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On a utilisé $e^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$.

14. Par un décalage d'indice, on écrit $r_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(n+1+k)! = (n+1)!(n+2)(n+3) \cdots (n+k+1) \geq (n+1)!(n+2)^k.$$

Donc, en reconnaissant une série géométrique,

$$r_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Comme, par ailleurs, $r_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$, l'encadrement

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq r_n \leq \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!},$$

les termes extrêmes étant équivalents entre eux, donne $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$.

15. La suite $\left(\frac{1}{i!}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ étant décroissante de limite nulle, le théorème spécial des séries alternées permet de majorer en valeur absolue le reste d'ordre $n - k$ de la série $\sum \frac{(-1)^i}{i!}$ par le premier terme négligé, à savoir $\left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$. On déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

en concluant par la formule du binôme. Finalement, de **13.**, on déduit la majoration

$$0 \leq d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \leq \frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{r_n}{2e}.$$

De **14.**, on déduit que r_n est négligeable devant $\frac{2^n}{(n+1)!}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On conclut donc que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right).$$

III. Autres estimations de distances en variation totale.

16. Posons $z = x * y$. On a clairement $z(k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puis, par produit de Cauchy,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=k} x(i) y(j) \right) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} y(j) \right) = 1 \times 1 = 1,$$

donc $x * y \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$.

17. Pour tout k entier naturel, on a (union disjointe):

$$\{X + Y = k\} = \bigsqcup_{i+j=k} (\{X = i\} \cap \{Y = j\}),$$

donc par additivité finie, et les variables X et Y étant indépendantes,

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(k) &= P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i+j=k} P(X = i) P(Y = j) = \sum_{i+j=k} p_X(i) p_Y(j) \\ &= (p_X * p_Y)(k). \end{aligned}$$

18. Soit k un entier naturel. On a alors

$$\begin{aligned}
|(x * y)(k) - (u * v)(k)| &= \left| \sum_{i+j=k} (x(i)y(j) - u(i)v(j)) \right| \\
&= \left| \sum_{i+j=k} \left(y(j) (x(i) - u(i)) + u(i) (y(j) - v(j)) \right) \right| \\
&\leq \sum_{i+j=k} \left| y(j) (x(i) - u(i)) + u(i) (y(j) - v(j)) \right| \\
&\leq \sum_{i+j=k} y(j) |x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i) |y(j) - v(j)|
\end{aligned}$$

en utilisant diverses inégalités triangulaires et la positivité des nombres $u(i)$ et $y(j)$.

19. Calculons encore un peu, en utilisant la majoration obtenue en question **18.**:

$$\begin{aligned}
2 d_{VT}(x * y, u * v) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |(x * y)(k) - (u * v)(k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=k} y(j) |x(i) - u(i)| \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=k} u(i) |y(j) - v(j)| \right).
\end{aligned}$$

Ce calcul peut être fait dans $[0, +\infty]$ puisque tous les termes sont positifs, ce qui évite de se poser des problèmes de convergence a priori. On reconnaît alors de nouveau des produits de Cauchy. Donc

$$\begin{aligned}
2 d_{VT}(x * y, u * v) &\leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x(i) - u(i)| \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} y(j) \right) + \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u(i) \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |y(j) - v(j)| \right) \\
&= 2 d_{VT}(x, u) \times 1 + 1 \times 2 d_{VT}(y, v),
\end{aligned}$$

ce qui est bien la majoration souhaitée.

20. Soit par un calcul direct, soit en considérant la somme de deux variables de Poisson indépendantes sur un espace probabilisé, on a facilement la relation

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \pi_\alpha * \pi_\beta = \pi_{\alpha+\beta}.$$

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, considérons n variables de Bernoulli indépendantes, de même paramètre λ , notées $X_1, \dots, X_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Il est alors connu que $S_k \sim \mathcal{B}(k, \lambda)$. Donc S_n a la même loi que U , et $p_{S_n} = p_U$.

On peut montrer par récurrence finie sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que $d_{VT}(p_{S_k}, \pi_{k\lambda}) \leq k\lambda^2$.

- initialisation pour $k = 1$: c'est la question **12.** puisque $S_1 = X_1$ est une variable de Bernoulli ;

- hérédité: soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, supposons la propriété vraie au rang k . Comme $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ avec $S_k \perp\!\!\!\perp X_{k+1}$ d'après le lemme des coalitions, on a

$$p_{S_{k+1}} = p_{S_k} * p_{X_{k+1}} = p_{S_k} * p_{X_1} .$$

Par ailleurs, $\pi_{(k+1)\lambda} = \pi_{k\lambda} * \pi_\lambda$. De la question **19.** et de l'hypothèse de récurrence, on déduit alors

$$\begin{aligned} d_{VT}(p_{S_{k+1}}, \pi_{(k+1)\lambda}) &= d_{VT}(p_{S_k} * p_{X_1}, \pi_{k\lambda} * \pi_\lambda) \\ &\leq d_{VT}(p_{S_k}, \pi_{k\lambda}) + d_{VT}(p_{X_1}, \pi_\lambda) \\ &\leq k\lambda^2 + \lambda^2 = (k+1)\lambda^2 , \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence, et donne la majoration souhaitée pour $k = n$.

21. On peut faire un calcul direct (et classique, je ne détaille pas) pour montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} .$$

Mais on peut aussi exploiter ce qui précède puisque, en posant $\lambda = \frac{\alpha}{n}$, on a la majoration

$$d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq n \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{n} .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a clairement

$$|p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |p_{B_n}(j) - \pi_\alpha(j)| = 2 d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq 2 \frac{\alpha^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 ,$$

donc par majoration de la valeur absolue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n = k) = \pi_\alpha(k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}$.

22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1[$, notons $\theta_{n,\lambda}$ la **distribution binomiale de paramètres n et λ** , c'est-à-dire l'application $\theta_{n,\lambda} : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \theta_{n,\lambda}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} .$$

Ainsi, $\theta_{1,\lambda}$ est la “distribution de Bernoulli” de paramètre λ .

Par un calcul analogue à celui de la question **20.**, on montre par récurrence que, si λ et μ sont dans $]0, 1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d_{VT}(\theta_{n,\lambda}, \theta_{n,\mu}) \leq n|\lambda - \mu|$, l'initialisation étant donnée par la question **11.**

En particulier, pour $n > \max\{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor\}$, on a $d_{VT}(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}, \theta_{n,\frac{\beta}{n}}) \leq |\beta - \alpha|$.

La question **20.** montre aussi que $d_{VT}(\theta_{n,\lambda}, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2$ si $\lambda \in]0, 1[$.

Par l'inégalité triangulaire et la symétrie (question **10.**), pour $n > \max\{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor\}$, on a

$$\begin{aligned} d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) &\leq d_{VT}(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}, \pi_\alpha) + d_{VT}(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}, \theta_{n,\frac{\beta}{n}}) + d_{VT}(\theta_{n,\frac{\beta}{n}}, \pi_\beta) \\ &\leq n \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + |\beta - \alpha| + n \left(\frac{\beta}{n}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n} + |\beta - \alpha| . \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha|$

Variante. En notant δ_0 la “distribution de Dirac” donnée par $\delta_0(k) = \delta_{0,k}$ (symbole de Kronecker) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que $u * \delta_0 = u$ pour tout $u \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$, puis on écrit, en supposant $\beta > \alpha$,

$$\begin{aligned} d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) &= d_{VT}(\pi_\alpha * \delta_0, \pi_\alpha * \pi_{\beta-\alpha}) \\ &\leq d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\alpha) + d_{VT}(\delta_0, \pi_{\beta-\alpha}) = d_{VT}(\delta_0, \pi_{\beta-\alpha}) \\ &= 1 - e^{\alpha-\beta} \quad (\text{calcul facile}) \leq \beta - \alpha = |\beta - \alpha|. \end{aligned}$$