Mines-Ponts 2011. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Prémilinaire.

1) $j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$ $\square$

2) En dévelopant le polynôme caractéristique par rapport à la première colonne par exemple, il vient immédiatement que $\chi_A(X) = X^4 + X^2 + 1$ qui admet j pour racine d'après la question 1) donc également $-j$ par parité et aussi $\overline{j} = j^2$ ainsi que $-\overline{j} = -j^2$ par conjugaison.
Ainsi $\chi_A(X) = (X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$ de sorte que A est bien $\mathbb{C}$-diagonalisable.
Il vient que $(1, j, j^2, 1)$ est vecteur propre relatif à j donc par conjugaison, puisque la matrice A est réelle, $(1, j^2, j, 1)$ est vecteur propre relatif à j^2.
De même $(1, -j, j^2, -1)$ est vecteur propre relatif à $-j$ donc $(1, -j^2, j, -1)$ est vecteur propre relatif à $-j^2$.
Il en découle que $U^{-1}AU = D$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & -j & -j^2 \\ j^2 & j & j^2 & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{Diag}(j, j^2, -j, -j^2)$ $\square$

3) Il en découle qu'un système fondamental de solutions de l'équation $X' = AX$ est $\left(e^{jt}V_1, e^{j^2t}V_2, e^{-jt}V_3, e^{-j^2t}V_4\right)$ en notant V_i la colonne n°i de la matrice U. $\square$

4) En introduisant la fonction Y de l'énoncé, il vient que l'équation (2) est équivalente au système (1).
Il en résulte qu'un système fondamental de solutions complexes est $\left(e^{jt}, e^{j^2t}, e^{-jt}, e^{-j^2t}\right)$.
En remarquant que la première et la seconde fonction (resp. la troisième et la quatrième) sont conjuguées, il vient que $\left(e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t), e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t), e^{t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t), e^{t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$ constitue un système fondamental de solutions réelles de (2). $\square$

B. Un lemme de du Bois-Reymond.

5) Par parité il suffit de vérifier que h est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$. Or h est clairement continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} h(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} h(t) = 0$ donc, par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
De même $\lim\limits_{t\to 1^-} h'(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} h'(t) = 0$ donc, par le même théorème appliqué à h', h est de classe $\mathcal{C}^2$. $\square$

Par contre $\lim\limits_{t\to 1^-} h^{(3)}(t) = -48$ alors que $\lim\limits_{t\to 1^+} h^{(3)}(t) = 0$ donc h n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$. $\square$

6) : $t \longmapsto \dfrac{2t - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0}$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même transformant $[x_0, x_1]$ en $[-1, 1]$ donc $g = h \circ u$ répond à la question. $\square$

7) Supposons F non identiquement nulle sur $[0, 1]$. Il existe alors, puisque F est continue, un segment $[x_0, x_1] \subset]0, 1[$ non réduit à un point tel que F soit d'un signe strictement fixe sur ce segment. La fonction h définie à la question précédente est élément de $E^2_{0,0}$: en effet $0 < x_0 < x_1 < 1$ donc $h(0) = h(1) = 0$ et h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $[0, 1]$.
Il en résulte par hypothèse que $\displaystyle\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Cette dernière intégrale vaut également $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ puisque g est nulle en dehors de $[x_0, x_1]$. Or $x \longmapsto f(x)g(x)$ est continue et d'un signe fixe sur $[x_0, x_1]$ (puisque g y est positive) donc, par le théorème de positivité "amélioré", $F(x)g(x)$ est identiquement nulle sur $[x_0, x_1]$.
Donc $F(x)$ est nulle sur $]x_0, x_1[$ puisque qu'alors $g(x) > 0$. Contradiction. $\square$

C. Une condition nécesaire d'Euler-Lagrange.

8) Soit r le maximum des degrés de P et de Q. La formule de Taylor pour les polynômes fournit :
$P\big(f_0(x) + tu(x)\big) = \sum\limits_{k=0}^{r} \dfrac{1}{k!} P^{(k)}\big(f_0(x)\big) t^k u(x)^k$ et $Q\big(f_0'(x) + tu'(x)\big) = \sum\limits_{k=0}^{r} \dfrac{1}{k!} Q^{(k)}\big(f_0'(x)\big) t^k u'(x)^k$.
Donc $q(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k t^t$ avec $a_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\int_0^1 \left(P^{(k)}\big(f_0(x)\big)u(x)^k + Q^{(k)}\big(f_0'(x)\big)u'(x)^k\right)\mathrm{d}\,x$ $\square$
En particulier $a_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(P'\big(f_0(x)\big)u(x) + Q'\big(f_0'(x)\big)u'(x)\right)\mathrm{d}\,x$ $\square$

9) En remarquant que $f_0 + tu \in E^2_{a,b}$ pour tout réel t, il vient que q est un polynôme qui atteint en 0 son minimum donc $a_1 = q'(0) = 0$. $\square$

En remarquant que :
$P'\big(f_0(x)\big)u(x) + Q'\big(f_0'(x)\big)u'(x) = \Big(P'\big(f_0(x)\big) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big[Q'\big(f_0'(x)\big)\Big]\Big)u(x) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big[Q'\big(f_0'(x)\big)u(x)\Big]$
il vient $\displaystyle\int_0^1 \Big(P'\big(f_0(x)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big[Q'\big(f_0'(x)\big)\Big]\Big)u(x) = 0$ car $u(0) = u(1) = 0$.
Comme cela est vrai pour tout élément u de $E^2_{0,0}$ il vient par la question 7) que :
$P'\big(f_0(x)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big[Q'\big(f_0'(x)\big)\Big] \quad \forall x \in [0,1]$ $\square$

10) Dans ce cas $P = 0$ et $Q = X^2$ de sorte que si f_0 existe elle satisfait l'équation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big[2f_0'(x)\big] = 0$ soit $f_0''(x) = 0$ donc $f_0(x) = x$ puisque $f_0(0) = 0$ et $f_0(1) = 1$ car $f_0 \in E^2_{0,1}$.
Ainsi si J_1 admet un minimum alors il est atteint uniquement en $f_0 : x \longrightarrow x$ et ce mimimum vaut donc 1. $\square$

11) Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit pour tout élément de $E^2_{0,1}$:
$1 = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}\,t}\sqrt{\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\,t} = \sqrt{J_1(f)}$ donc $J_1(f) \geqslant 1$.
Compte-tenu de la question précédente il en résulte que J_1 admet un minimum qui est atteint uniquement en $f_0 : x \longrightarrow x$ et ce mimimum vaut 1. $\square$

12) Dans ce cas $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$ de sorte que si f_0 existe elle satisfait l'équation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big[2y' + 3y'^2\big] = 0$.
Ainsi $f_0'(x)^2 + \dfrac{2}{3}f_0'(x)$ est constant sur $[0,1]$ donc $\Big(f_0'(x) + \dfrac{1}{3}\Big)^2$ aussi. En notant α^2 cette constante, il vient donc que, pour tout x fixé de $[0,1]$, $f_0'(x) = \alpha - \dfrac{1}{3}$ ou $f_0'(x) = -\alpha - \dfrac{1}{3}$. Ainsi f_0' ne peut prendre que deux valeurs et est donc constante puisque f_0' est continue. Il en résulte que f_0 est une fonction affine et comme elle s'annule en 0 et en 1 elle est identiquement nulle.
Ainsi si J_2 admet un minimum alors il est atteint uniquement en la fonction nulle et vaut donc 0. $\square$

13) La fonction f proposée est bien élément de $E^2_{0,0}$ de même que la fonction tf pour tout réel t.
Or $J_2(tf) = t^2 \displaystyle\int_0^1 (2x - 3x^2)^2\,\mathrm{d}\,x + t^3 \int_0^1 (2x - 3x^2)^3\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{15}t^2 - \frac{2}{35}t^3$ par un calcul facile.
Ainsi $J_2(tf) = \dfrac{t^2}{105}\big(14 - 6t\big)$ donc par exemple $J_2(3f) < 0$ ce qui prouve, compte-tenu de la question précédente, que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. $\square$

D. Un exemple avec dérivée seconde.

14) Soit $f \in E$. Comme $2|f(x)f''(x)| \leqslant f^2(x) + f''^2(x)$, le produit ff" est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Une conséquence classique et immédiate des accroissements finis est que si une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$ est telle que g' admette une limite ℓ en $+\infty$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ alors g tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Donc si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = \ell$ avec $\ell = +\infty$ ou $\ell > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$ ce qui est en contradiction avec le fait que f^2 est intégrable.
En conclusion ff' ne peut pas avoir une limite non nulle en $+\infty$: soit elle tend vers 0 soit elle n'admet pas de limite. $\square$

15) Par parties (licite puisque f' est $\mathcal{C}^1$) il vient pour $A > 0$:
$\varphi(A) = \displaystyle\int_0^A f'^2(x)\,\mathrm{d}\,x = f(A)f'(A) - f(0)f'(0) - \int_0^A f(x)f''(x)\,\mathrm{d}\,x \quad (1).$
Comme φ est croissante on a $\lim\limits_{A\to+\infty} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.
Or puisque ff" est intégrable on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A f(x)f''(x)\,\mathrm{d}\,x = I \in \mathbb{R}$ et comme $f(A)f'(A)$ ne tend pas vers $+\infty$ par la question précédente, il en découle que $\ell \in \mathbb{R}$ en d'autres termes $f' \in L^2$. $\square$
(1) prouve alors que $f(A)f'A)$ admet une limite en $+\infty$ et d'après la question précédente cette limite est forcément nulle. $\square$

16) Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) le système fondamental de solutions de (2) établi à la question 4).
Il est immédiat que e_1 et e_2 sont éléments de L^2. Soit alors $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 \in L^2$.
Comme L^2 est un espace vectoriel, $ce_3 + de_4 \in L^2$.
Or $e : t \longmapsto e^{-t/2}$ appartient aussi à L^2 et le produit de deux fonctions de L^2 est dans L^1 donc :
$c\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + d\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$ appartient à L^1 ce qui exige évidemment $c = d = 0$

En conclusion partielle l'ensemble des solutions de (2) appartenant à L^2 est $\text{vect}(e_1, e_2)$.
En outre cet espace est stable par dérivation donc inclus dans E.
En conclusion finale l'ensemble des solutions de (2) appartenant à E est $\text{vect}(e_1, e_2)$. $\square$

17) Si J admet un minimum en f alors, d'après la question précédente, f est de la forme $\alpha e_1 + \beta e_2$.
Par ailleurs l'équation caractéristique de (3) : $y'' + y' + y = 0$ ayant pour racines j et j^2, un système fondamental de solutions de (3) est $\big(e_1, e_2\big)$.
Donc si J admet un minimum en f alors f est solution de (3). $\square$

Par ailleurs $J(f) = \dfrac{1}{4}\big(\alpha^2 + 3\beta^2 + 2\sqrt{3}\alpha\beta\big) = \dfrac{1}{4}\big(\alpha + \sqrt{3}\beta\big)^2$ donc si J admet un minimum en f nécessairement $\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$.

Il vient alors $f(t) = \beta\, e^{-t/2}\Big(-\sqrt{3}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)\Big) = \dfrac{\beta}{2}\sin\big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\pi}{3}\big)$.
Ainsi si J admet un minimum en f alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\psi$. $\square$

18) Il vient $\big(f^2 - f'^2 + f''^2\big)^2 - \big(f + f' + f''\big)^2 = -2\big(f'^2 + ff' + ff'' + f'f''\big) = \Big((f + f')^2\Big)'$
d'où l'égalité proposée par l'énoncé par intégration de 0 à A. $\square$

Comme f, f'' et f' (Cf question 15) appartiennent à L^2 qui est un espace vectoriel, la fonction $f + f' + f''$ également. L'égalité de l'énoncé entraîne alors par différence que $\big(f(A) + f'(A)\big)^2$ admet une limite ℓ en $+\infty$. Or $(f + f')^2$ est élément de L^1 car $f + f'$ est élément de l'espace vectoriel L^2 donc $\ell = 0$. $\square$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient ainsi $J(f) = \big(f(0) + f'(0)\big)^2 + \displaystyle\int_0^{+\infty} (f + f' + f'')^2 \quad \forall f \in E \quad (4)$
En particulier $J(f) \geqslant 0$ et $J(\lambda\psi) = \lambda^2\big(\psi(0) + \psi'(0)\big)$ car ψ est solution de (3).

Or un calcul facile montre que $\psi(t) + \psi'(t) = e^{-t/2}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$ donc $J(\lambda\psi) = 0$.

Il résulte alors de la question 17) et de ce qui précède que la fonction J admet sut E un minimum égal à 0 atteint uniquement en toutes les fonctions de la forme $\lambda\psi$. $\square$

19) L'égalité (4) ci-dessus montrant que $J(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in E$, si 0 est atteint c'est évidemment le minimum de J. Or toujours d'après (4), $J(f) = 0$ si et seulement si $f'' + f' + f = 0$ (par théorème de positivité "amélioré" du fait que f est $\mathcal{C}^4$ donc a fortiori $\mathcal{C}^2$) et $f(0) + f'(0) = 0$.
Or comme déjà noté $f' + f' + f = 0$ si et ssi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \alpha e_1 + \beta e_2$.

La condition initiale $f(0) + f'(0) = 0$ équivaut alors (calcul facile) $\alpha + \sqrt{\beta} = 0$ soit à $f(t) = \dfrac{\beta}{2}\sin\big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\pi}{3}\big)$.

On retrouve donc bien la conclusion de la question 18). $\square$

Une inégalité de Hardy et Littlewood.

20) Soit $f \in E$ et $\mu > 0$. Le changement de variable $x \longmapsto \mu x$ qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même prouve que $f_\mu \in L^2$ et $\mu\|f_\mu\|^2 = \|f\|^2$. De même $f'_\mu \in L^2$ et $\|f'_\mu\|^2 = \mu\|f\|^2$ ainsi que $f''_\mu \in L^2$ et $\|f''_\mu\|^2 = \mu^3\|f\|^2$. Ainsi f_μ est bien élément de E (car en outre de classe $\mathcal{C}^4$) et donc $J(f_\mu) \geqslant 0$ pour tout $\mu > 0$ d'après la partie précédente.
Donc $P(\mu) = \|f''\|^2\mu^2 - |f'\|^2\mu + \|f\|^2 \geqslant 0$ pour tout $\mu > 0$ en considérant $J(f_{\sqrt{\mu}})$.
Mais en outre cette inégalité est également trivialement vraie pour $\mu \leqslant 0$ donc en fait pour tout réel μ.
Le discriminant de ce trinôme du second degré en μ est donc négatif ou nul ce qui fournit l'inégalité demandée. $\square$

21) Il y a égalité si et ssi le discriminant de P est nul donc si et ssi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $P(\mu) = 0$.
Si $\mu \leqslant 0$ alors $P(\mu) = 0$ si et ssi $\|f\| = 0$ soit si et ssi $f = 0$.
Si $\mu > 0$ alors comme $P(\mu) = \mu J(f_{\sqrt{\mu}})$ alors égalité si et ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sqrt{\mu}} = \lambda\psi$.
En conclusion en remarquant que le cas $f = 0$ est inclus dans le cas $\mu > 0$ (avec $\lambda = 0$) il vient (quitte à changer μ en μ^2) :
Il y a égalité si et ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ tels que $f(x) = \lambda\psi(\dfrac{x}{\mu})$. $\square$

FIN