

e3a PSI B - 2009

Un corrigé

Exercice 1.

1. D'après le théorème du rang $\ker(A)$ est de dimension $4 - \text{rg}(A) = 1$ et est donc une droite vectorielle. En particulier, 0 est valeur propre de A .
2. Avec les hypothèses sur la somme par ligne des coefficients de A , on peut affirmer que $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
3. 0 et 1 sont valeurs propres (et donc de multiplicité au moins 1) et -1 est valeur propre double. La somme des multiplicités des valeurs propres n'excédant pas 4 (dimension de l'espace), on a toutes les valeurs propres (racines de P_A). Comme P_A est unitaire ($(-1)^4 = 1$) on a ainsi

$$P_A = X(X-1)(X+1)^2$$

4. R_k est de degré inférieur à 3 et s'écrit $a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k$. En notant Q_k le quotient, on a $X^k = P_A Q_k + R_k$; en appliquant cette égalité à 0, 1, -1 et en la dérivant puis en faisant $X = -1$, on obtient (pour $k \geq 1$)
$$\begin{cases} d_k = 0 \\ a_k + b_k + c_k + d_k = 1 \\ -a_k + b_k - c_k + d_k = (-1)^k \\ 3a_k - 2b_k + c_k = k(-1)^k \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} a_k = \frac{1+(3-2k)(-1)^k}{4} \\ b_k = \frac{1+(-1)^k}{2} \\ c_k = \frac{1+(2k-5)(-1)^k}{4} \\ d_k = 0 \end{cases}.$$
5. Comme $P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbre et comme P_A annule A (théorème de Cayley-Hamilton) on en déduit que

$$\forall k \geq 1, A^k = R_k(A) = \frac{1+(3-2k)(-1)^k}{4} A^3 + \frac{1+(-1)^k}{2} A^2 + \frac{1+(2k-5)(-1)^k}{4} A$$

Exercice 2.

1. (a) Comme on peut passer à la limite dans une égalité large, $\forall n, \alpha \leq x_n \leq \beta$ donne $x \in [\alpha, \beta]$. f étant continue (et même deux fois dérivable) sur cet ensemble, elle est continue en x . En passant à la limite dans $f(x_n) = 0$ ($n \rightarrow +\infty$) on obtient $f(x) = 0$.
 - (b) f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$, l'égalité des accroissements finis donne l'existence de $y_n \in]x_n, x_{n+1}[$ tel que $f(x_{n+1}) - f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)f'(y_n)$ et donc $f'(y_n) = 0$.
 - (c) (x_n) et (x_{n+1}) étant convergentes de limite x , on a $y_n \rightarrow x$ par théorème d'encadrement. Par continuité de f' en x et comme $\forall n, f'(y_n) = 0$, on obtient $f'(x) = 0$ en faisant tendre n vers $+\infty$.
 - (d) f est donc solution du problème de Cauchy associé à (E) et aux conditions $y(x) = y'(x) = 0$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire, ce problème admet sur $[\alpha, \beta]$ une unique solution. Comme la fonction nulle est une solution, f est donc la fonction nulle.
2. Dans le cas général (x_n) est une suite bornée de réels. On peut en extraire une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass) et se ramener au cas précédent. Le théorème précédent n'est cependant pas au programme de PSI (me semble-t-il)...
 3. $x \mapsto \cos(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ et s'annule une infinité de fois.

Exercice 3.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

1. Si $\lambda < 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum(u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

2. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. (a) Comme $\beta - \lambda < 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

(b) Ce qui précède s'écrit $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N, u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

(c) Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum(K v_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum(u_n)$.

4. Si $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda, 1[$. On a alors

$$\exists N / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N, u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum(K v_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum(u_n)$.

5. $\sum(x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$ sur $]1, +\infty[$)

$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^n y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

Partie B.

1. On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.

2. (a) $t \mapsto \frac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

(b) Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n} \right]_0^b + 4n \int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n \left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Les différents termes admettent une limite quand $b \rightarrow +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

- (c) On a ainsi $\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une série à termes > 0 , on est dans le cas de la partie A avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.
3. (a) On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).
- (b) α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On est dans le cadre de la partie A (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha + 1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha + 1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha + 1 < 1$ et divergence si $\alpha + 1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

(c) On a

$$\forall x \in [-1, 1], |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1, 1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

- (d) On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de A.1 pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. ($|a_n|$) n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.
- (e) On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha - k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour $k \geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Mais d'après 3.b, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certain rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.

Si $x \in [0, 1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k \geq n} a_k x^k \right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$. $\sum(a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0, 1]$ et S est donc continue sur $[0, 1]$. Comme en question c, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

Exercice 4.

1. Un développement par bilinéarité donne

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} \lambda_i \lambda_j \langle x_i | x_j \rangle$$

Avec l'hypothèse faite, on a alors immédiatement

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i \right\|$$

Supposons $(x_1, \dots, x_p)$ libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\sum \lambda_i y_i = 0$. Ce qui précède donne $\sum \lambda_i x_i = 0$ et l'indépendance des x_i donne la nullité des λ_i . On a donc aussi l'indépendance linéaire de la famille $(y_1, \dots, y_p)$.

2. $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et, par cardinal et dimension, c'est une base de E . Il existe donc une unique application linéaire f telle que $\forall i, f(x_i) = y_i$. On a

$$\left\| f \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

et f conserve la norme. C'est donc un automorphisme orthogonal.

3. (a) On a $p \leq n$ car la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre en dimension n . Comme on suppose $p \neq n$, on a ainsi $p < n$. On a $\dim(F) = p$ (indépendance de x_i) et le cours indique que

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F) = n - p$$

G est aussi de dimension p (car $(y_1, \dots, y_p)$ est libre d'après la question 1) et donc

$$\dim(G^\perp) = n - \dim(G) = n - p$$

- (b) Dans un espace de dimension k , une famille orthonormale a au plus k éléments (car elle est libre) et il y en a une de k éléments (existence de b.o.n.). Ainsi, l'entier q convient ssi $q - p \in [0..n - p]$ c'est à dire $q \in [p..n]$ (le cas $q = p$ étant discutable car il n'y a alors rien à ajouter).

Soient $i, j \in [1..q]$; par symétrie des rôles, on peut supposer $i \leq j$. On distingue alors trois cas.

- Si $i \leq j \leq p$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$ par hypothèse.
- Si $i \leq p < j$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = 0$ ($x_i \in F$, $x_j \in F^\perp$, $y_i \in G$ et $y_j \in G^\perp$).
- Si $p + 1 \leq i \leq j$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = \delta_{i,j}$ (familles orthonormées).

On a ainsi prouvé que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, q\}, \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$$

- (c) Pour $q = n$, on est amené au cas de la question 2. L'automorphisme orthogonal trouvé convient a fortiori si on se limite aux p premiers vecteurs.
4. Soit r le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$. Si $r = 0$ alors les x_i sont tous nuls, les y_i le sont donc aussi ($\forall i, \|x_i\| = \|y_i\|$) et on peut choisir l'application identique pour f . On suppose donc que $r \geq 1$.

Quitte à renuméroter, on peut supposer que $(x_1, \dots, x_r)$ est libre. La question 1 montre que $(y_1, \dots, y_r)$ est libre. Notons que la famille $(y_1, \dots, y_p)$ est aussi de rang r (en effet, les x et y jouent des rôles symétriques et on a une équivalence en question 1). Les espaces $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$ ont ainsi même dimension.

En procédant comme à la question 3.c, on trouve un automorphisme orthogonal f tel que $\forall i \in [1..r], f(x_i) = y_i$ et $f(F^\perp) = G^\perp$.

Soit alors $i \geq r + 1$; il existe des scalaires λ_k tels que $x_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k$ et

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k y_k$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall j \in [1..r], \langle f(x_i) | y_j \rangle &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle y_k | y_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle x_k | x_j \rangle \\ &= \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \langle y_i | y_j \rangle \end{aligned}$$

On a ainsi $f(x_i) - y_i \in G^\perp$. Mais par ailleurs, $f(x_i) - y_i \in G$ ($x_i \in F$ et $f(x_i) \in f(F) = G$; $y_i \in G$). Finalement, $f(x_i) - y_i = 0$, ce qu'il restait à prouver.