SESSION de 1990

CONCOURS INTERNE

ET

CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5.

L'épreuve est construite sur le thème du tétraèdre, à partir d'activités envisageables en classe.

La première partie porte sur une étude de configurations planes que l'on exploite dans la deuxième partie relative à des tétraèdres particuliers. Ces deux parties sont indépendantes dans une large mesure. La troisième partie est consacrée à l'étude des sections planes d'un tétraèdre quelconque ; elle met en œuvre le produit vectoriel. Cette dernière partie est indépendante des deux premières.

Première partie

Soit dans le plan quatre demi-droites distinctes Sx, Sy, Sz et St de même origine S. Les angles géométriques $\widehat{xSy}$ et $\widehat{ySz}$ d'une part, $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$ d'autre part, sont adjacents. Chacun de ces trois angles a une mesure strictement inférieure à π et la somme de leurs mesures est strictement inférieure à 2π.

La construction de quatre points M, N, P, Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz et St et satisfaisant à certaines contraintes fait l'objet de cette première partie.

1. Dans cette question la contrainte (C_1) à laquelle sont assujettis les quatre points M, N, P et Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz et St est la suivante :

(C_1)
- M, N, P et Q sont distincts de S ;
- SM = SQ ;
- Les trois triangles SMN, SNP et SPQ ont la même aire.

1.1. Démontrer que si quatre points M, N, P et Q satisfont à la contrainte (C_1) alors il en est de même de leurs images dans toute homothétie de centre S et de rapport k, $k > 0$.

Dans la suite de cette première partie, le point M de la demi-droite Sx, M distinct de S, est supposé donné.

1.2. *a.* Faire une figure d'étude $\mathcal{F}_1$ représentant les quatre demi-droites Sx, Sy, Sz et St ainsi que le point M, en prenant :

$$\widehat{xSy} = \frac{2\pi}{3}; \qquad \widehat{ySz} = \frac{\pi}{6}; \qquad \widehat{zSt} = \frac{\pi}{4}; \qquad SM = 5 \text{ cm}.$$

On s'appuiera sur cette figure pour traiter la question 1.2.*b* suivante dans laquelle la longueur SM et les angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ ne sont plus particularisés.

b. En utilisant le fait que l'égalité des aires des triangles SMN et SNP équivaut à l'égalité des distances des points M et P à la droite (SN), montrer que les triangles SMN et SNP ont la même aire si et seulement si le milieu U du segment [MP] appartient à la droite (SN). Situer d'une manière analogue le milieu V du segment [NQ] pour que les triangles SNP et SPQ aient la même aire.

En déduire, à partir de la donnée du point M, la détermination des points N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_1). Construire ces points sur la figure $\mathcal{F}_1$.

Tournez la page S. V. P.

1.3. Dans cette question, on étudie des configurations particulières.

a. Faire une figure $\mathcal{F}_2$ représentant les quatre demi-droites Sx, Sy, Sz et St en prenant :

$$\widehat{xSy} = \frac{2\pi}{3}; \quad \widehat{ySz} = \frac{\pi}{6}; \quad \widehat{zSt} = \frac{\pi}{2}; \quad \text{le point M est tel que SM} = 5 \text{ cm.}$$

Construire sur la figure $\mathcal{F}_2$ les points M, N, P, Q vérifiant la contrainte (C_1). Montrer que dans ce cas particulier la droite (PQ) est parallèle à la droite (SN) et en déduire que le point V, milieu du segment [NQ], est aussi le milieu du segment [SP]. Montrer également que le triangle NPQ a pour périmètre, le périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q et pour aire, l'aire commune aux triangles SMN, SNP et SPQ.

b. Plus généralement, les angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ et la distance SM n'étant plus particularisés, on recherche pour quelles configurations les points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_1) sont tels que le milieu V du segment [QN] soit aussi le milieu du segment [SP].

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) le point V, milieu du segment [QN], est le milieu du segment [SP];
(*ii*) le quadrilatère SNPQ est un parallélogramme;
(*iii*) la droite (SN) est parallèle à la droite (PQ);
(*iiii*) le milieu du segment [MQ] appartient à la droite (SN).

En déduire que, les points M, N, P et Q satisfaisant à (C_1), le point V milieu du segment [QN] est également le milieu du segment [SP] dans les deux cas particuliers suivants :

1° La mesure de l'angle $\widehat{xSy}$ est la somme des mesures des deux angles $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$.
Les propriétés du 1.3.*a.* relatives au périmètre et à l'aire du triangle NPQ se généralisent-elles ?

2° La somme des mesures des angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à π.

En s'appuyant sur une figure, montrer dans ce cas particulier les propriétés suivantes :
- les triangles SMN, SNP et SPQ sont isométriques;
- le triangle NPL, où L désigne le point d'intersection des droites (MN) et (PQ) a même périmètre et même aire que les triangles SMN, SNP et SPQ;
- le point U, milieu du segment [MP], est aussi le milieu du segment [SN].

2. Dans cette question, on cherche quelles conditions imposer aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St pour que, M étant toujours donné, les quatre points M, N, P, Q appartenant respectivement à ces demi-droites et satisfaisant à la contrainte (C_1) vérifient aussi la propriété (p) :

(p) | On peut construire un triangle NPR tel que :
- les points S et R sont de part et d'autre de la droite (NP);
- NR = NM ; PR = PQ ;
- les triangles NPR et SNP ont la même aire.

On note toujours U le milieu du segment [MP] et V le milieu du segment [NQ].

2.1. Montrer que si le point R existe, alors le milieu W du segment [SR] appartient à la droite (NP).

2.2. En exploitant la question 1.3. *b*, montrer que la propriété (p) est réalisée pour les quatre points M, N, P, Q satisfaisant à (C_1) dans les cas particuliers suivants :

- la somme des mesures des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à π;
- la mesure de l'un des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à la somme des mesures des deux autres.

Dans chacun de ces cas, faire une figure indiquant la construction du point R. Indiquer chaque fois la disposition des points U, V, W par rapport aux points I, J, K, milieux respectifs des côtés [SN], [SP] et [PN] du triangle SNP.

Tournez la page S.V.P.

2.3. Soit M, N, P, Q quatre points satisfaisant à la contrainte (C_1); on recherche à quelles conditions la propriété (p) est réalisée. Pour cela, en supposant que le point R existe, on étudie la disposition des six points U, V, W, I, J, K, où I, J et K désignent toujours les milieux respectifs des segments [SN], [SP] et [NP].

a. Démontrer les égalités :

$$UJ = VI; \qquad WJ = VK; \qquad UK = WI.$$

b. Soit T le point d'intersection des perpendiculaires menées des points M et Q respectivement aux droites (SN) et (SP).

Montrer que $NM^2 - NT^2 = PQ^2 - PT^2$. En déduire que le point T appartient à la perpendiculaire menée de R à la droite (NP).

c. Soit H l'orthocentre du triangle SNP. Démontrer que les points U, V et W sont les projetés orthogonaux du milieu Ω du segment [TH] sur les droites (SN), (SP), (PN) respectivement.

d. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle SNP.

On suppose $U \neq I$ et $V \neq J$. Démontrer que $W = K$; pour cela, on mettra en œuvre dans un premier temps la rotation r telle que $r(U) = I$ et $r(J) = V$ après avoir caractérisé son centre.

e. Déduire de cette étude que les seules dispositions possibles des points U, V, W, I, J, K pour que la propriété (p) soit réalisée sont :

1°	$U = I$;	$V = J$;	$W = K$.
2°	$U \neq I$;	$V \neq J$;	$W = K$.
3°	$U \neq I$;	$V = J$;	$W \neq K$.
4°	$U = I$;	$V \neq J$;	$W \neq K$.

2.4. En utilisant les questions 2.2. et 2.3, quelle conclusion peut-on apporter à l'étude entreprise dans cette deuxième question ?

3. Dans le cas particulier où les demi-droites Sx et St sont opposées, les triangles SMN, SNP, SPQ sont isométriques. Leur périmètre est celui de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q. Plus généralement, on recherche quelles conditions imposer aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St pour que l'on puisse assujettir quatre points M, N, P et Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St à la contrainte (C_2) :

(C_2)
- M, N, P, Q sont distincts de S et SM = SQ.
- Les trois triangles SMN, SNP et SPQ ont le même périmètre égal au périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q.

3.1. Montrer que l'on peut toujours supposer le point M donné.

3.2. Soit quatre points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_2).

Écrire les relations liant les nombres $x =$ SM, $y =$ SN, $z =$ SP, $l_1 =$ MN, $l_2 =$ NP, $l_3 =$ PQ.

Exprimer x, y, z en fonction de l_1, l_2, l_3 et conclure.

Tournez la page S.V.P.

Deuxième partie

A. *Tétraèdre trirectangle.*

L'étude porte sur le «patron» d'un tel tétraèdre. Soit un tétraèdre SABC et (π) le plan de la face ABC; on appelle développement dans (π) (ou «patron») du tétraèdre, l'ensemble des quatre triangles formé par la face ABC et les rabattements sur (π), à l'extérieur de ABC, des trois autres faces, les droites (BC), (CA) et (AB) servant de charnières. Les rabattements de S sont notés S_1 (face SBC), S_2 (face SCA) et S_3 (face SAB).

Dans toute cette question, on impose que les trois faces SBC, SCA et SAB soient rectangles en S; on dira que le tétraèdre est trirectangle en S.

1.1. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan (π) et H_1 la projection orthogonale de S sur la droite (BC). Faire un dessin en perspective. Montrer que les points A, H, H_1 sont alignés. Quel est le rôle de H pour la face ABC? Montrer que cette face a trois angles aigus.

1.2. Sachant que les côtés de la face ABC ont pour longueurs

$$BC = \sqrt{10}, \qquad CA = \sqrt{7}, \qquad AB = \sqrt{5},$$

calculer les longueurs des arêtes [SA], [SB] et [SC]. L'unité de longueur étant 3 cm, indiquer la construction des segments [BC], [CA] et [AB] et dessiner le développement du tétraèdre. On s'appuiera sur la figure obtenue pour traiter la question suivante dans laquelle les longueurs des côtés du triangle ABC ne sont plus particularisées.

1.3. Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle S_1, S_2, S_3. Déterminer l'image de la droite (S_1C) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωC) ainsi que l'image de la droite (S_1B) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωB). Montrer que les droites (S_2C) et (S_3B) sont symétriques par rapport à la droite $(A\omega)$ et en déduire que les droites (S_1B) et (S_1C) sont symétriques par rapport à la droite (ωS_1).

1.4. On dispose d'une plaque de carton de forme circulaire sur le bord de laquelle on a marqué trois points S_1, S_2, S_3 n'appartenant pas à un même demi-cercle. Construire un triangle inclus dans la plaque et tel que «S_1, S_2, S_3, ABC» soit le développement d'un tétraèdre SABC trirectangle en S.

B. *Tétraèdre équifacial.*

1. Lien avec le tétraèdre trirectangle et le parallélépipède rectangle.

Soit SABC un tétraèdre trirectangle en S. On note P le milieu du segment [BC], Q le milieu du segment [CA] et R le milieu du segment [AB].

1.1. Démontrer que les arêtes opposées du tétraèdre PQRS ont même longueur. En déduire que les faces de ce tétraèdre sont isométriques.

On dira qu'un tel tétraèdre est équifacial.

1.2. Soit I le milieu de l'arête [PQ] et J le milieu de l'arête [SR].

Démontrer que la droite (IJ) est un axe de symétrie du tétraèdre PQRS et déterminer deux autres axes de symétrie.

Soit O le milieu du segment [IJ]. Montrer que le point O est l'isobarycentre des quatre points P, Q, R, S ainsi que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre PQRS.

1.3. Soit ABCD un tétraèdre tel que AB = CD et, E et F désignant les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], tel que la droite (EF) soit orthogonale aux droites (AB) et (CD). Ainsi, la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

Soit A′, B′, C′, D′ les images respectives des sommets A, B, C, D du tétraèdre dans la symétrie centrale de centre le point Ω, milieu du segment [EF].

Tournez la page S. V. P.

a. Montrer que $AC'BD'$ est un rectangle.

b. Démontrer que A, C′, B, D′, B′, D, A′, C sont les huit sommets d'un parallélépipède rectangle.

c. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

d. En s'appuyant sur un dessin, indiquer comment on peut extraire un tétraèdre équifacial d'un parallélépipède rectangle. Examiner aussi le cas particulier du cube.

2. Développement d'un tétraèdre équifacial.

Dans cette question, on admet la propriété : dans tout tétraèdre, en chaque sommet du tétraèdre les angles des faces contenant ce sommet ont une somme strictement inférieure à 2π et chacun de ces angles est strictement inférieur à la somme des deux autres.

2.1. En utilisant la première partie, montrer que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit que ses quatre faces aient la même aire.

2.2. Établir que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit qu'en chaque sommet du tétraèdre la somme des angles des faces contenant ce sommet soit égal à π. Pour cela, on exploitera le développement du tétraèdre.

3. Tétraèdre dans lequel l'isobarycentre Ω des sommets A, B, C, D est le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

Les points A, B, C, D vérifient par hypothèse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} = \vec{0}. \\ \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D. \end{cases}$$

On note E le milieu du segment [AB] et F le milieu du segment [CD].

3.1. Montrer que la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

3.2. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

Troisième partie

Tétraèdre quelconque. Aire de l'intersection avec un plan.

L'objet de cette partie est de démontrer, par le calcul vectoriel, qu'un plan de section d'aire maximale d'un tétraèdre est nécessairement le plan d'une face.

L'espace est orienté. Soit ABCD un tétraèdre ; on pose :

$$2\vec{S}_1 = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}; \qquad 2\vec{S}_2 = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}; \qquad 2\vec{S}_3 = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}; \qquad 2\vec{S}_4 = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

1. Établir l'égalité :

$$\vec{S}_4 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3.$$

2. Sections triangulaires.

Soit les points M_1, M_2, M_3 définis par :

$$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{AM_3} = \gamma\overrightarrow{AD},$$

où α, β, γ sont trois nombres réels de l'intervalle $]0,1]$.

Tournez la page S. V. P.

2.1. On pose $2\vec{T} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$.

– Exprimer $\vec{T}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$.

– Montrer que, pour tout réel ρ :

$$\vec{T} = (\beta\gamma - \rho)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha - \rho)\vec{S}_2 + (\alpha\beta - \rho)\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4.$$

En choisissant $\rho = \inf(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$, montrer que :

$$\|\vec{T}\| \leqslant \operatorname{Max}(\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|);$$

on pourra utiliser l'égalité suivante où a, b, c désignent trois nombres réels :

$$a(b + c) - bc = a^2 - (a - b)(a - c).$$

2.2. Interpréter les normes des vecteurs $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ et $\vec{T}$; résoudre le problème des sections triangulaires d'aire maximale.

3. Sections quadrangulaires.

Soit les points M_1, M_2 M_3, M_4 définis par :

$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DM_3} = \lambda\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DM_4} = \mu\overrightarrow{DB}$, où α, β, λ, μ sont quatre nombres réels de l'intervalle $]0, 1[$.

On suppose que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires et on pose :

$$2\vec{Q} = \overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_2M_4}.$$

3.1. Interpréter la norme de $\vec{Q}$.

3.2. Exprimer $\vec{Q}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$:

$$\vec{Q} = k_1\vec{S}_1 + k_2\vec{S}_2 + k_3\vec{S}_3.$$

Vérifier que k_1 et k_2 sont positifs et que :

$$1 - k_1 - k_2 + k_3 = (1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu).$$

3.3. La coplanéité de M_1, M_2, M_3, M_4 s'exprime par une relation entre α, β, λ, μ . Former cette relation et en déduire que le produit précédent $(1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu)$ est positif.

3.4. Dans l'hypothèse $\alpha\beta \leqslant \lambda\mu$ montrer que :

$$\|\vec{Q}\| \leqslant \operatorname{Max}(\|\vec{S}_1\|; \|\vec{S}_2\|; \|\vec{S}_3\|).$$

Dans le cas où $\alpha\beta > \lambda\mu$, quelle autre expression de $\vec{Q}$ mettrait-on en œuvre pour conclure ?

• • •