Partie I.

1. **Endormorphisme**
   - Il est clair que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   - φ linéaire : on voit facilement que $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})$.

   Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   Satabilité Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrons $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   On a $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ donc $\deg(\mathrm{P}') \leqslant n$

   Ainsi $\deg(\mathrm{P} - \mathrm{P}') = \deg(\varphi(\mathrm{P})) \leqslant n$ d'où le résultat

   Ainsi $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par φ.

   On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ un endomorphisme}}$

2. La matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

3. Le polynôme caractéristique de φ est $\chi_\varphi = (\mathrm{X}-1)^{n+1}$ (matrice triangulaire)
   donc le spectre de φ_n est $\{1\}$.
   On trouve facilement que $\mathrm{rg}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]-\varphi_n}) = \mathrm{rg}(\mathrm{I}_{n+1} - \mathcal{M}(\varphi_n)) = n$.
   donc selon le théorème du rang : $\dim(\mathrm{E}_1(\varphi_n)) = 1$ or $\varphi_n(1) = 1$
   de plus $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)} \dim\left(\mathrm{E}_\lambda(\varphi_n)\right) = 1$ et $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1 > 1$

   ainsi $\boxed{\begin{array}{l}\text{la seule valeur propre de } \varphi_n \text{ est et le sous-espace propre est } \mathrm{E}_1(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(1) \\ \text{ainsi l'endomorphisme } \varphi_n \text{ n'est pas diagonalisable}\end{array}}$

4. À l'aide de la matrice de φ_n, on trouve que $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$
   ainsi $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de l'espace de dimension finie } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$

5. Comme φ est un automorphisme, on a pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,
   $$\varphi_n(x) = \tfrac{\mathrm{X}^i}{i!} \text{ si et seulement si } x = \varphi_n^{-1}\left(\tfrac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$$
   ceci nous donne l'existence et l'unicité de $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}$
   De plus $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une famille échelonnée donc libre constituée de $n+1$ vecteurs
   comme $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, alors $\left(\frac{\mathrm{X}^0}{0!}, \frac{\mathrm{X}^1}{1!}, \ldots, \frac{\mathrm{X}^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$
   l'image d'une base par l'automorphisme φ_n^{-1} étant une base, on en déduit que

   $\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe une unique famille de polynômes } s_0, s_1, \ldots, s_n \text{ telle que :} \\ \quad \text{(a) } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{\mathrm{X}^i}{i!}, \\ \quad \text{(b) } (s_0, s_1, \ldots, s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].\end{array}}$

6. On a $(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)-(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n+1})=\mathrm{Id}-\delta^{n+1}$
Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Par récurrence immédiate, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg\left(\delta^k(\mathrm{P})\right)\leqslant -k+\deg\mathrm{P}$
donc $\deg\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)\leqslant -1$ et ainsi $\left(\delta^{n+1}(\mathrm{P})\right)=0$
on a donc bien $\boxed{(\mathrm{Id}-\delta)\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}}$

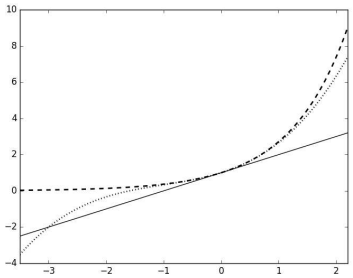
7. On déduit de la question précédente que $\varphi_n\circ(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{Id}$
Comme φ_n est endomorphisme d'un espace de dimension finie alors $\varphi_n^{-1}=\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n$
donc pour i dans $[\![0,n]\!]$, on a $s_i=\varphi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^n)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)=(\mathrm{Id}+\delta+\cdots+\delta^i)\left(\frac{\mathrm{X}^i}{i!}\right)$
On en déduit $\boxed{s_i=1+\dfrac{\mathrm{X}}{1!}+\cdots\dfrac{\mathrm{X}^i}{i!}=\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\frac{\mathrm{X}^j}{j!}}$

Partie II.

On obtient les limites des fonctions polynomiales en $\pm\infty$ à l'aide des termes de plus haut degré.

8. On a $\mathrm{S}_3'=\mathrm{S}_2=1+\mathrm{X}+\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$ dont le discriminant vaut -1.
Soit $x\in\mathbb{R}$.
Par inégalité de convexité : $\mathrm{S}_1(x)=1+x\leqslant \mathrm{e}^x$ et par habitude : $\mathrm{S}_1(x)=\mathrm{e}^x\iff x=0$
On a $\mathrm{S}_3(x)-\mathrm{S}_1(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}=\dfrac{x^2}{6}(3+x)$
donc $\boxed{(\mathrm{S}_3(x)=\mathrm{S}_1(x)\iff x=0 \text{ ou } x=-3) \text{ et } (\mathrm{S}_3(x)<\mathrm{S}_1(x)\iff x<-3)}$
Étudions $\varphi=\exp-\mathrm{S}_3$, on a $\varphi'=\exp-\mathrm{S}_2$ et $\varphi''=\exp-\mathrm{S}_1$ qui est positive avec un seul point d'annulation
donc φ' est strictement croissante et $\varphi'(0)=0$ donc φ' est du signe (strict) de x
donc φ est strictement décroissante (respectivement croissante) sur $]-\infty,0]$ (respectivement sur $[0,+\infty[$)
donc $\boxed{\exp(x)\geqslant \mathrm{S}_3(x) \text{ et } \exp(x)\geqslant \mathrm{S}_1(x) \text{ avec égalités si et seulement si } x=0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{S}_3'(x)$		$+$	
S_3	$-\infty$	↗	$+\infty$



9. On va montrer par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:
« S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. »

Initialisation : Pour $n\in\{0,1\}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée facilement.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, on ait $\mathcal{P}_p$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$.

Si $n+1$ est impair, alors n est pair

Dans ce cas S_n ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ par hypothèse et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_n(x)=+\infty$
par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{S}_{n+1}'(x)=\mathrm{S}_n(x)>0$ car S_n est continue sur $\mathbb{R}$
donc S_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{S}_{n+1}(x)=-\infty$
La fonction S_{n+1} étant continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle admet alors une unique racine.
Comme S_{n+1}' n'admet pas de racine réelle, la seule racine de S_{n+1} est simple.

Si $n+1$ est pair, alors n est impair dans ce cas S_n ne s'annule qu'en un seul point noté α

Comme il s'agit d'une racine simple, S_n change de signe en α ; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n(x) = +\infty$

donc $\forall x > \alpha$, $S_n(x) = S'_{n+1}(x) > 0$ et $\forall x < \alpha$, $S_n(x) = S'_{n+1}(x) < 0$

donc S_{n+1} est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

ainsi S_{n+1} admet donc un minimum en α

de plus $S_{n+1}(\alpha) = S_n(\alpha) + \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ car $n+1$ pair et $\alpha \neq 0$ car $S_n(0) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ S_{n+1}(x) \geqslant S_{n+1}(\alpha) > 0$ d'où S_{n+1} n'admet pas de racine

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $S_{2n-1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{X^k}{k!} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{X^{2p}}{(2p)!} + \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{X^{2p}(2p+1+X)}{(2p+1)!}$

donc $S_{2n-1}(-2n-1) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(2n+1)^{2p}(2p-2n)}{(2p+1)!} \leqslant 0$ donc $-2n-1 \leqslant \alpha_{2n-1}$ (admis par l'énoncé)

De plus : $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) = S_{2n-1}(\alpha_{2n-1}) + \dfrac{\alpha_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{\alpha_{2n-1}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{\alpha_{2n-1}^{2n}\,(2n+1+\alpha_{2n-1})}{(2n+1)!}$

donc $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) \geqslant 0$ d'où $\alpha_{2n-1} \geqslant \alpha_{2+1}$

ainsi la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(b) i. Comme toute suite convergente est bornée, ceci nous fournit $K > 0$, tel que $\forall m \in \mathbb{N}, v_m \in [-K, K]$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence ici $\mathbb{R}$

donc la suite de fonction polynomiale $(S_m)_m$ converge uniformément sur $[-K, K]$ vers exp

ceci nous fournit $M \in \mathbb{N}$, tel que $\forall m \geqslant M$, $\forall x \in [-K, K]$, $|S_m(x) - e^x| \leqslant \varepsilon$

en particulier $\forall m \geqslant M,\ \forall m \in \mathbb{N},\ |S_m(v_m) - e^{v_m}| \leqslant \varepsilon$

ii. On vient de montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon$

ce qui signifie : $S_m(v_m) - e^{v_m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme exp est continue, on a $e^{v_m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$

Par somme $S_m(v_m) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$

on en déduit que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ}

(c) La suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Par l'absurde, si on avait $\ell \neq -\infty$, la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ serait convergente vers ℓ

donc $(S_{2n+1}((\alpha_{2n+1})))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $e^{\ell} > 0$ d'après (b)

or il s'agit de la suite identiquement nulle

Absurde On en déduit que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

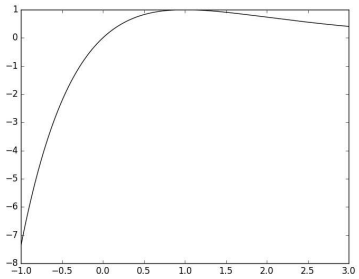
Partie III.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ qui est du signe de $(1-x)$
La limite en $-\infty$ s'obtient par produit celle en $+\infty$ par la croissance comparée $t\mathrm{e}^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

Ce qui donne :

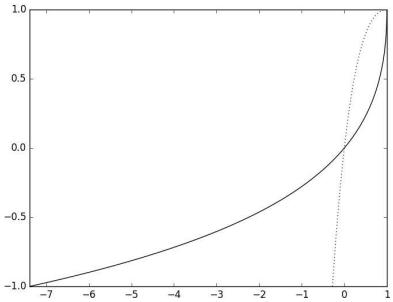
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	↗	1	↘	0

Ci-contre une représentation de h :



12. La fonction h est continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$ de plus $\lim\limits_{x\to1} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ donc h induit une bijection de $]-\infty,1[$ vers $]-\infty,1[$
On pose g la bijection réciproque qui est continue et strictement croissante
De plus h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et h' ne s'annule pas sur $]-\infty,1[$
donc $\boxed{g \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de }]-\infty,1[\text{ dans }]-\infty,1[\text{ vérifiant } \forall x \in]-\infty,1[,\ h(g(x)) = x}$

Le graphe de g est obtenu en échangeant tableaux des abscisses et ordonnées utilisées pour h. En pointillés, la courbe de la restricton de h.



13. Comme h induit une bijection de $]-\infty,1[$ vers $]-\infty,1[$, il existe un unique $\rho \in]-\infty,1[$ tel que $h(\rho) = -1$.
De plus $\forall x \geqslant 1$, $h(x) > 0$ ainsi $\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } \rho \text{ tel que } h(\rho) = -1}$

14. $h(-1/2) = -\dfrac{\mathrm{e}^{3/2}}{2}$ donc $\ln(-h(-1/2)) = \dfrac{3}{2} - \ln(2) > 1 - \ln(2) > 0$ car $2 \leqslant \mathrm{e}$
donc $-h(-1/2) > 1$ d'où $h(-1/2) < -1 = h(\rho)$
comme h est strictement croissante sur $]-\infty,1[$ alors $-1/2 < \rho$
d'un autre côté $h(-1/4) = -\dfrac{\mathrm{e}^{5/4}}{4}$
donc $\ln(-h(-1/4)) = \dfrac{5}{4} - 2\ln(2) \leqslant \dfrac{5}{4} - \dfrac{26}{20} = -\dfrac{1}{20} < 0$ car $\ln 2 \geqslant \frac{13}{20}$
donc $h(-1/4) > h(\rho)$
On a bien $\boxed{\rho \text{ dans l'intervalle }]-1/2,-1/4[}$

15. (a) Comme $\mathrm{e}^{nz} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$, par définition sur $\mathbb{C}$ de l'exponentielle ;

on a l'existence de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}$ car $z^n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k$ d'où

$$(z\mathrm{e}^{1-z})^n \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = \mathrm{e}^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k = \mathrm{e}^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(nz)^k}{k!}=\mathrm{e}^{nz}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(nz)^k}{k!}=\mathrm{e}^{nz}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(nz)^k}{k!}=\mathrm{e}^{nz}-\mathrm{S}_n(nz)$$

On a bien l'égalité : $\boxed{1-\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z)=1-\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{S}_n(nz)=(z\mathrm{e}^{1-z})^n\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}}$

(b) Pour $k\geqslant n+1$, on a $\left|\frac{n^k}{k!}z^{k-n}\right|\leqslant\frac{n^k}{k!}$

et $\sum_{k\geqslant n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}$ est une série convergente (en prenant $z=1$ dans la question précédente)

donc à l'aide de la question précédente et comme $\left|z\mathrm{e}^{1-z}\right|\leqslant 1$ et $|z|\leqslant 1$:

$$\left|1-\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z)\right|=\left|z\mathrm{e}^{1-z}\right|^n\mathrm{e}^{-n}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}|z|^{k-n}\leqslant\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}$$

On obtient : $\boxed{|1-\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z)|\leqslant 1-\mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1)}$ car $1-\mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1)=(1\mathrm{e}^{1-1})^n\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}1^{k-n}$

(c) Par l'absurde si on avait $\mathrm{T}_n(z)=0$, on aurait $1\leqslant 1-\mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1)$ d'après la question précédente
donc $\mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1)\leqslant 0$ donc $\mathrm{T}_n(1)\leqslant 0$ ce qui est absurde
On en déduit que $\boxed{\mathrm{T}_n(z)\neq 0}$

16. En reprenant le calcul du 10.(a), on a pour $m\in\mathbb{N}$: $\mathrm{S}_{2m+1}(\mathrm{X})=\sum_{p=0}^{m}\left(\frac{\mathrm{X}^{2p}}{(2p)!}+\frac{\mathrm{X}^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)$

Donc $\mathrm{S}_{2m+1}(-2m-1)=\sum_{p=0}^{m}\frac{(2m+1)^{2p}}{(2p+1)!}(2p+1-2m-1)$
donc pour n impair, on a $\mathrm{S}_n(-n)<0$ donc $-n<\alpha_n$ (admis par l'énoncé et vu en 10. !)
ainsi $-n<\alpha_n<0$ en utilisant les variations de S_n de la partie II or $0=\mathrm{S}_n(\alpha_n)=\mathrm{T}_n(\alpha_n/n)$
donc d'après la contraposée de la question 15 : $|\alpha_n/n|>1$ ou $|\alpha_n/n\exp(1-\alpha_n/n)|>1$
ainsi $|\alpha_n|>n$ ou $|h(\alpha_n/n)|>1$
donc $|h(\alpha_n/n)|>1$ et ainsi $h(\alpha_n/n)<-1=h(\rho)$ car $-1<\alpha_n/n<0$
donc $\alpha_n/n<\rho$ d'où $\boxed{\alpha_n\in]-n,n\rho[}$

Partie IV.

17. La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On peut donc utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale :à l'ordre n. Soit $u\in\mathbb{R}$. On a

$$\exp(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(-u)}{k!}(0+u)^k+\int_{-u}^{0}\frac{(0-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

donc $1=\mathrm{e}^{-u}\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+\int_{-u}^{0}\frac{(-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$
On effectue dans l'intégrale le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $x=-t$; $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$
ainsi $1=\mathrm{e}^{-u}\mathrm{S}_n(u)-\int_u^0\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{\mathrm{e}^{-u}\mathrm{S}_n(u)=1+\frac{1}{n!}\int_u^0 t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}$

18. En utilisant la question précédente en $u = \alpha_n$, on a : $0 = 1 + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

Comme $\alpha_n/n = \gamma_n$, on effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $nt = x$; $n\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

donc $n\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} (nt)^n \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = -1$ et ainsi $-1 = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$ d'où $\boxed{\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} h(t)^n \mathrm{d}t = -\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}}$

19. Quand $m \longrightarrow +\infty$, on pose $n = 2m+1$ et $n \longrightarrow +\infty$ et Stirling nous dit que : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} h(t)^n \mathrm{d}t \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} \longrightarrow 0$. D'où $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$

20. Pour $t \in]-\infty, 0]$, $h(t) \leqslant 0$ donc $h(t)^{2m+1} \leqslant 0$ et $\gamma_{2m+1} \leqslant \rho \leqslant 0$ (voir 16 et 14)

Ainsi les trois intégrales de la relation de Chasles sont négatives :

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t + \int_{\rho}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t$$

d'où $\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leqslant 0$

Ainsi selon le théorème des gendarmes $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$ selon 19

21. Comme h est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, on a $\forall t \leqslant \rho,\ h(t) \leqslant -1$ et $h(t)^{2m+1} \leqslant -1$

donc pour $m \geqslant 1$, comme on a $\gamma_{2m+1} \leqslant \rho$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t \leqslant (\rho - \gamma_{2m+1}) \times (-1)$

donc $0 \leqslant \rho - \gamma_{2m+1} \leqslant -\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t$

Alors avec les gendarmes : $\gamma_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \rho$ selon 20 d'où $\alpha_{2m+1}/(2m+1) \underset{m\to+\infty}{\sim} \rho$

donc $\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} (2m+1)\rho$ D'où $\boxed{\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} 2m\rho}$

Partie V.

22. (a) Selon l'égalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i\alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i\,|\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i$ car les $\theta_i > 0$

Comme $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i\,|\alpha_i| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$

donc $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i\,(1 - |\alpha_i|)$,somme de réels positifs

donc $\theta_1\,(1-|\alpha_1|) = \cdots = \theta_p\,(1-|\alpha_p|) = 0$ d'où $1 - |\alpha_1| = \cdots = 1 - |\alpha_p| = 0$

ainsi $\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \text{ sont des nombres complexes de module exactement } 1}$

(b) On a $\left|\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2 = \left(\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\overline{\left(\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)} = \left(\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\left(\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1\theta_2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

donc $\left|\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\cos(t)\theta_1\theta_2$

D'un autre côté $\left|\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2 = |\theta_1\alpha_1 + \theta_2\alpha_2|^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2$ par hypothèse

donc $2\cos(t)\theta_1\theta_2 = 2\theta_1\theta_2$ ainsi $\cos(t) = 1$ car $\theta_1\theta_2 > 0$

donc $\sin(t) = 0$ d'où $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1$, $\boxed{\text{on a justifié que } \alpha_2 = 1 \text{ avec ces hypothèses}}$

(c) Sous les hypothèses de la questions 22, on va montrer
par récurrence bornée sur $k \in [\![1,p]\!]$ que : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$

Initialisation : La propriété est évidente pour $k = 1$.

Traitons le cas : $k = 2$. (si $p \geqslant 2$) avec la convention $\sum_{i=a}^{b}(\cdots) = 0$ si $b < a$

On a : $\sum_{i=1}^{2}\theta_i + \sum_{i=3}^{p}\theta_i = \sum_{i=1}^{p}\theta_i = \left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{2}\theta_i\alpha_i\right| + \left|\sum_{i=3}^{p}\theta_i\alpha_i\right|$

de plus $\left|\sum_{i=1}^{2}\theta_i\alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\theta_i$ et $\left|\sum_{i=3}^{p}\theta_i\alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=3}^{p}\theta_i\alpha_i$

donc $\left|\sum_{i=1}^{2}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{2}\theta_i$ et $\left|\sum_{i=3}^{p}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=2}^{p}\theta_i$

On a $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ en utilisant (a) avec $p = 2$

On pose $\alpha'_1 = 1$ et $\alpha'_2 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ et on a $\left|\sum_{i=1}^{2}\theta_i\alpha'_i\right| = \sum_{i=1}^{2}\theta_i$,

en utilisant (b) on obtient : $\alpha'_2 = 1$ donc $\alpha_2 = \alpha_1$

Hérédité : Soit $k \in [\![1,p-1]\!]$ tel que $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \alpha_i = \alpha_1$. Montrons $\alpha_{k+1} = \alpha_1$.

On a $\left|\sum_{i=1}^{k}\theta_i\alpha_i\right| = |\alpha_1| \times \left|\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right| = \sum_{i=1}^{k}\theta_i$

Et en faisant comme ci dessus pour $k = 2$, on obtient $\left|\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{k+1}\theta_i$

En posant $\alpha'_2 = \alpha_{k+1}/\alpha_1$, $\theta'_1 = \sum_{i=1}^{k}\theta_i$ et $\theta'_2 = \theta_{k+1}$ et comme $|\alpha_1| = 1$,

on a $|1\cdot\theta'_1 + \alpha'_2\theta'_2| = \theta'_1 + \theta'_2$ où $\theta'_1 > 0$, $\theta'_2 > 0$ et $|\alpha'_2| = 1$

En ré-appliquant (b), on obtient $\alpha'_2 = 1$ d'où le résultat

Conclusion : On a montré par récurrence que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$: $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \alpha_i = \alpha_1$

Dans le cas général, on a bien : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$

23. (a) On a $\mathrm{P}(0) = a_0 > 0$ et $\mathrm{P}(1) = a_n + \cdots a_0 > 0$ ce qui justifie que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P

(b) $(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^{n+1} + (a_{n-1}-a_n)\mathrm{X}^n + \cdots + (a_1-a_2)\mathrm{X}^2 - a_0 = a_n\mathrm{X}^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})\,\mathrm{X}^k - a_0$

(c) Par l'absurde, on suppose P admet une racine z telle que $|z| \leqslant 1$
donc z est racine de $(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$ donc $a_nz^{n+1} + (a_{n-1}-a_n)z^n + \cdots + (a_1-a_2)z^2 = a_0 > 0$
Je pose alors $n = p$, $\alpha_p = z^{n+1}$, $\alpha_{p-1} = z^n, \ldots, \alpha_1 = z^2$ et $\theta_p = a_n$, $\theta_{p-1} = a_{n-1} - a_n, \ldots, \theta_1 = a_1 - a_2$
de sorte que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module $\leqslant 1$
et $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont des nombres réels > 0 tels que $\left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| = a_0 = \sum_{i=1}^{p}\theta_i$
On peut donc appliquer 22 pour obtenir : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$
donc $z^2 = z^3$ ainsi $\mathrm{Z} \in \{0,1\}$ ce qui est en contradiction avec 23(a)
Ainsi les racines complexes de P ont un module > 1

24. Soit z une racine de Q.
Si $z = 0$, alors on a bien $|z| < 1$
Si $z \neq 0$, alors $\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^n} = 0$
donc $1/z$ est racine du polynôme $\mathrm{P(X)} = a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n$
Ainsi le polynôme vérifie les hypothèses de la questions 23
d'où $|1/z| > 1$ et donc $|z| < 1$
On a bien montré que $\boxed{\text{les racines complexes de Q ont un module} < 1}$

25. Soit r une racine complexe de S_n donc $z = r/n$ est une racine de T_n
Or $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}\mathrm{X}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$ en posant $a_i = \dfrac{n^i}{i!}$
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i > 0$ et si $i < n$, on a $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{n^{i+1} i!}{(i+1)! n^i} = \dfrac{n}{i+1}$
donc $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$ ce qui permet d'appliquer 23
d'où $|r| < 1$ donc $|z| < n$
$\boxed{\text{les racines de } \mathrm{S}_n \text{ sont bien de module} < n}$