

**1. Question préliminaire .**

• Posons :  $u_n = \frac{(pn)^r}{(pn)!}$ , alors  $0 < u_n \leq \frac{(pn)^r}{n!} = v_n$ , or

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de  $\sum_n v_n z^n$  est  $+\infty$ , et par comparaison le rayon de convergence de  $\sum_n u_n z^n$  est aussi  $+\infty$ .

• D'après le résultats précédent,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_n u_n z^{pn}$  converge, donc le rayon de convergence de cette série est  $+\infty$ .

A : **Équivalence entre  $(H_{r,p})$  et  $(H_{r,1})$  où  $r > 0$  .**

2. •  $\forall t > 1$ ,  $\varphi'_x(t) = (t+r-1)t^{-r}(t-1)^{r-1} > 0$ , donc  $\varphi_x$  est strictement croissante, donc bijective de  $[1, +\infty[$  vers  $[-x, +\infty[$ , et vu que  $0 \in ]-x, +\infty[ \exists! t_x > 1$  tel que  $\varphi_x(t_x) = 0$ .

On conclut que  $\varphi_x$  est négative sur  $[1, t_x]$  et positive sur  $[t_x, +\infty[$ .

• Considérons la suite  $(u_n(x))_n$ .

$\forall n \geq 1$ ,  $u_n(x) - u_{n-1}(x) = -\frac{n^r}{n!} x^{n-1} \varphi_x(n)$  de signe opposé à celui de  $\varphi_x(n)$ , donc  $(u_n(x))_{0 \leq n \leq [t_x]}$  est croissante et  $(u_n(x))_{n \geq [t_x]}$  est décroissante.

3. Soit  $x$  tel que  $x + \alpha \geq 1$ , un développement limité au voisinage de  $+\infty$  de  $\varphi_x(x + \alpha)$  donne :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x + \alpha) &= (x + \alpha)^{1-r} (x + \alpha - 1)^r - x = x \left[ \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha - 1}{x}\right)^r - 1 \right] = \\ &= x \left[ \left(1 + \frac{(1-r)\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{r(\alpha-1)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1 \right] = \alpha - r + o(1). \end{aligned}$$

On conclut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(x + \alpha) = \alpha - r$ .

• Avec  $\alpha = r$ , on obtient  $\varphi_x(x + \alpha) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Posons  $y = \varphi_x(x + \alpha)$ , alors  $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , or  $\varphi^{-1}$  est continue en 0, donc lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_x^{-1}(y) = \varphi_x^{-1}(0) + o(1) = t_x + o(1)$ , c'est à dire  $x + r = t_x + o(1)$ , on conclut donc que  $t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} o(1)$ .

4. On pose pour simplifier  $m = [x]$ .

• Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a aussi  $m \rightarrow +\infty$  grâce à l'inégalité  $m \leq x < m + 1$ .

On suppose dans un premier temps  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{u_{m+k}(x)}{u_m(x)} = \left(\frac{m+k}{m}\right)^r \frac{x^k}{(m+1)(m+2)\dots(m+k)} \sim \left(\frac{x}{m}\right)^k, \text{ or } 1 \leq \frac{x}{m} < 1 + \frac{1}{m}, \text{ donc } \frac{u_{m+k}(x)}{u_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

On suppose maintenant  $k < 0$ .

En utilisant l'équivalence précédente, on obtient  $u_{[x]}(x) = u_{[x]+k+(-k)}(x) \sim u_{[x]+k}(x)$ .

• On vient de montrer que pour  $i \in [[[x]-n, \dots, [x]]]$ ,  $u_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} u_{[x]}(x)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x)}{u_{[x]}(x)} = n+1$ ,

donc pour  $x$  assez grand, on a  $\frac{\sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x)}{u_{[x]}(x)} \geq n$ .

5. • Grâce à l'équivalence  $u_{[x]+k}(x) \sim u_{[x]}(x)$ , Il suffit de prouver que  $u_{[x]}(x) = o(x^r e^x)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\text{De la question 4. } \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geq A, u_{[x]}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=[x]-n}^{[x]} u_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=[x]-n}^{[x]} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \varepsilon x^r \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \varepsilon x^r e^x.$$

On conclut que  $u_{[x]+k}(x) = o(x^r e^x)$ .

• On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} t_x - x - r = 0$ , donc au voisinage de  $+\infty$ , on a  $-\frac{1}{2} < t_x - x - r < \frac{1}{2}$ , donc

$x + r - 1 - \frac{1}{2} < t_x - 1 < [t_x] \leq t_x < x + r + \frac{1}{2} < [x] + [r] + 2 + \frac{1}{2}$ , donc  $[x] + [r] - 1 - \frac{1}{2} < [t_x] < [x] + [r] + 2 + \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $[x] + [r] - 1 \leq [t_x] \leq [x] + [r] + 2$  et par suite  $\exists i \in [[[r] - 1, [r] + 2]]$  tel que  $[t_x] = [x] + i$ , finalement  $M_x = u_{[t_x]}(x) = u_{[x]+i}(x) = o(x^r e^x)$ .

$$6. \bullet \text{ Soit } N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^N D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^N D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^N D_n u_n(x) =$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (D_{n+1} - D_n) u_n(x) + D_1 u_0(x) - D_N u_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} u_n(x) z^n - D_N u_N(x).$$

$$\text{Or } |D_N| = \left| \frac{z^N - 1}{z - 1} \right| \leq \frac{2}{|z - 1|} \text{ et } u_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ pour } x > 0 \text{ fixé.}$$

$$\text{et par passage à la limite } N \rightarrow +\infty, \text{ on obtient } \sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) z^n = S_{r,1}(zx).$$

$$\bullet \text{ L'inégalité } |D_n| \leq \frac{2}{|z - 1|} \text{ entraîne } |S_{r,1}(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|.$$

$$\text{Or grâce à la question A.2., } \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \sum_{n=1}^{[t_x]} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=[t_x]}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = u_{[t_x]}(x) - u_0(x) + u_{[t_x]}(x) - u_{\infty}(x) \leq 2u_{[t_x]}(x) \leq 2M_x.$$

$$\text{Ce qui donne } |S_{r,1}(x)| \leq \frac{4M_x}{|1 - z|}, \text{ or } M_x = o(x^r e^x), \text{ donc par comparaison } S_{r,1}(x) = o(x^r e^x).$$

$$7. \bullet \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \zeta^{kn} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \left( \sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k \right).$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = \begin{cases} 0, & \text{si } \zeta^n \neq 1 \\ p, & \text{si } \zeta^n = 1, \text{ ie } : p|n \end{cases}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p \sum_{n=1}^{+\infty} u_{np}(x) = p S_{r,p}(x).$$

$$\bullet \text{ On sait que } \forall k \in [[1, p-1]], S_{r,1}(\zeta^k x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^r e^x), \text{ donc de l'égalité précédente,}$$

$$p S_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = S_{r,1}(x) + o(x^r e^x).$$

Cette dernière égalité assure que si  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$S_{r,1}(x) \sim x^r e^x \text{ si et seulement si } S_{r,p}(x) \sim \frac{x^r e^x}{p}.$$

## B. Une démonstration probabiliste

8.  $X_x$  suit la loi de poisson de paramètre  $x$ , donc  $E(X_x) = V(X_x) = x$ , et par inégalité de Tchebychev

$$P(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) = P(|X_x - E(X_x)| > \alpha x^{2/3}) \leq \frac{V(X_x)}{\alpha^2 x^{4/3}} = \frac{1}{\alpha^2 x^{1/3}}, \text{ donc}$$

$$P(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

9. • Les variables  $A_x$  et  $B_x$  sont finies, donc d'espérances finies.

• Par la formule de transfert, on obtient,

$$E(A_x) = \sum_{\frac{k}{x} < 1 - x^{-1/3}} \left( \frac{k}{x} \right)^r P(X_x = k) \leq (1 - x^{-1/3})^r \sum_{x-k > x^{2/3}} P(X_x = k) = (1 - x^{-1/3})^r P(x - X_x > x^{2/3}).$$

$$\text{Or } (x - X_x > x^{2/3}) \subset (|X_x - x| > x^{2/3}), \text{ ce qui entraîne avec la question 8., } P(x - X_x > x^{2/3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\text{et vu que } 1 - x^{-1/3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} E(A_x) = 0.$$

$$\bullet \text{ Soit } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left| \frac{k}{x} - 1 \right| \leq x^{-1/3} \text{ et } x > 1, \text{ alors } 1 - x^{-1/3} \leq \frac{k}{x} \leq 1 + x^{-1/3}, \text{ or } E(B_x) =$$

$$\sum_{|k-x| \leq x^{2/3}} \left( \frac{k}{x} \right)^r P(X_x = k), \text{ donc}$$

$$(1 - x^{-1/3}) \sum_{|k-x| \leq x^{2/3}} P(X_x = k) \leq E(B_x) \leq (1 + x^{-1/3}) \sum_{|k-x| \leq x^{2/3}} P(X_x = k)$$

$$\text{Or } \sum_{|k-x| \leq x^{2/3}} P(X_x = k) = P(|X_x - x| \leq x^{2/3}) = 1 - P(|X_x - x| > x^{2/3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1, \text{ d'après la question 8.}$$

$$\text{On conclut que } \lim_{x \rightarrow +\infty} E(B_x) = 1.$$

10. • Soit  $j > M = \max(N-1, x+x^{2/3})$ , (car pour  $j \leq N-1$ ,  $\prod_{k=0}^{N-1} (j-k) = 0$ ), alors  $\prod_{k=0}^{N-1} (j-k)P(X_x = j) = \frac{j!}{(j-N)!} \frac{x^j}{j!} e^{-x} = x^N e^{-x} \frac{x^{j-N}}{(j-N)!}$ , la série  $\sum_{j \geq N} \frac{x^{j-N}}{(j-N)!}$  converge absolument, ce qui assure l'existence de  $E(Y_{N,x})$  et on a

$$E(Y_{N,x}) = \sum_{j > x+x^{2/3}} \prod_{k=0}^{N-1} P(X_x = j) = x^N e^{-x} \sum_{j > x+x^{2/3}} \frac{x^{j-N}}{(j-N)!} = x^N \sum_{j > x+x^{2/3}-N} \frac{x^j}{j!} e^{-x} = x^N \sum_{j > x+x^{2/3}-N} P(X_x = j) = x^N P(X_x > x+x^{2/3}-N).$$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - Nx^{-2/3}) = 1$ , donc pour  $x$  assez grand  $\frac{1}{2} \leq 1 - Nx^{-2/3}$ , c'est à dire  $\frac{1}{2}x^{2/3} \leq x^{2/3} - N$ , d'où les inclusions

$(X_x - x > x^{2/3} - N) \subset (X_x - x > \frac{1}{2}x^{2/3}) \subset (|X_x - x| > \frac{1}{2}x^{2/3})$  et par suite  $P(X_x > x+x^{2/3}-N) \leq P(|X_x - x| > \frac{1}{2}x^{2/3})$ , ce qui entraîne grâce à la question 8.,  $P(X_x > x+x^{2/3}-N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , et par suite  $E(Y_{N,x}) = o(x^N)$ .

11. • La famille  $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-N+1))$  est une base de  $\mathbb{R}_N[X]$ , ce qui assure l'existence de  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$  tel que  $X^N = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$  et puisque  $X^N$  est sans coefficient constant,  $a_0 = 0$ ,

$$\text{donc } X^N = \sum_{k=1}^N a_k \prod_{j=0}^{k-1} (X-j).$$

On a donc  $X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k \prod_{j=0}^{k-1} (X_x - j)$  et par suite  $1_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k Y_{k,x}$ .

• Pour tout  $x > 0$ ,  $(X_x > x+x^{2/3}) = (Z_x > 1+x^{-1/3})$ , donc  $1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N = \frac{1}{x^N} 1_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N$  et par linéarité de l'espérance, on obtient

$$E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N) = \frac{1}{x^N} E(1_{(X_x > x+x^{2/3})} X_x^N) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{1}{x^N} E(Y_{k,x}).$$

La question 10 nous affirme que  $\forall k \in [[1, N]]$ ,  $E(Y_{k,x}) = o(x^k)$  et puisque  $o(x^k) = o(x^N)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\forall k \in [[1, N]]$ ,  $E(Y_{k,x}) = o(x^N)$  et par suite  $E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  comme somme finie de terme de limite nulle.

12. •  $r > 0$ , soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N-1 \leq r < N$ , or de l'inclusion  $(Z_x > 1+x^{-1/3}) \subset (Z_x > 1)$ , on obtient  $1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r \leq 1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N$ , et par suite  $0 \leq E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r) \leq E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^N)$ , donc grâce à la question 11.  $E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

•  $\forall x > 0$ ,  $\Omega = (|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) \cup (Z_x > 1+x^{-1/3}) \cup (Z_x < 1-x^{-1/3})$ , donc

$Z_x^r = B_x + A_x + 1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r$  et par linéarité de l'espérance, on aura  $E(Z_x^r) = E(B_x) + E(A_x) + E(1_{(Z_x > 1+x^{-1/3})} Z_x^r)$  et grâce au résultat précédent et la question 9. on obtient  $E(Z_x^r) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

•  $E(Z_x^r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{x}^r P(X_x = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^r x^k}{x^r k!} e^{-x} = \frac{1}{x^r e^x} S_{r,1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , c'est à dire  $S_{r,1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x$ .

13. On pose  $a_n = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}$ .

$(p(n+1))! = (pn+p)! = (pn)!(pn+1)\dots(pn+p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (pn)!(pn)^p$  et  $(p(n+1))^r \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (pn)^r$ , donc

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} > 0.$$

La série  $\sum_n b_n z^n$  est de rayon de convergence  $+\infty$ , et le lemme assure que  $\sum_n a_n x^{pn}$  est de rayon de

convergence  $+\infty$  et on a  $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} x^{pn} = x^p S_{r-p,p}(x)$ .

• L'équivalence précédente entraîne que pour  $r > 0$ ,

si  $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{p}$ , alors  $S_{r-p,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{r-p} e^x}{p}$ .

• La validité de  $H_{r,p}$  est assurée pour  $r > 0$ .

Soit  $r \leq 0$ , considérons  $q = \left\lceil \frac{-r}{p} \right\rceil + 1$ , alors  $q - 1 \leq \frac{-r}{p} < q$ , donc  $r + pq > 0$  et en itérant l'implication précédente, on obtient  $(H_{r,p}) \implies (H_{r-kp,p})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Or  $r + pq > 0$ , donc  $(H_{r+pq,p})$  est valide et par l'implication précédente  $(H_{r,p}) = (H_{r+pq-pq})$  est aussi valide.

### C : Application à l'équation d'Airy

#### 14. Question préliminaire .

- $\forall n \geq 2, v_n - v_{n-1} = \ln(n) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(x+n) = -x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

Un développement lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , donne  $v_n - v_{n-1} = \frac{x+x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , or  $x+x^2 > 0$ , donc

$v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x+x^2}{n^2}$ , ce qui assure par équivalence que  $\sum_n (v_n - v_{n-1})$  converge comme la série de Riemann  $\sum_n \frac{1}{n^2}$ .

- Posons  $u_n = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ , alors  $\ln(u_n) = v_n$ , or la série télescopique  $\sum_n (v_n - v_{n-1})$  converge, donc la suite  $(v_n)_n$  converge et par suite  $u_n = e^{v_n}$  converge vers un réel strictement positif qu'on notera  $\Gamma(x)$ .

En définitive  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(x)$  c'est à dire  $\prod_{k=0}^n (x+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{\Gamma(x)}$ .

15.  $x''(t) = tx(t)$  est une équation linéaire de deuxième ordre, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz global, le problème de Cauchy  $\begin{cases} x'' = tx \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases}$  admet une solution unique définie sur  $\mathbb{R}$ .

16. Posons  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ . En remplaçant  $f$  dans l'équation, on obtient  $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, n \geq 1 \end{cases}$

Il s'agit d'une relation de récurrence de pas égale à 3.

$a_1 = a_2 = 0$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$  et par récurrence

$$a_{3n} = a_0 \frac{1}{(3n)(3n-1)} \frac{1}{(3n-3)(3n-4)} \cdots \frac{1}{6 \times 5} \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2)} = \frac{1}{9^n n! \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\right)}$$

17. • On sait d'après la question 14., que  $\prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{2}{3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n-1)^{2/3} (n-1)!}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$ .

Donc  $a_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^n n! n^{2/3} (n-1)!} = \frac{n^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^n (n!)^2}$ .

- Par la formule de Stirling, on a  $(n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n$  et  $(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$ , donc

$$(n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)! 2\pi n}{4^n \sqrt{4\pi n}} = \frac{(2n)!}{4^n} \sqrt{\pi n}.$$

Ce qui conduit à  $a_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{1/3} 4^n}{9^n (2n)! \sqrt{\pi n}} = \frac{n^{-1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$ .

18. On pose  $b_n = n^{-1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$ , alors  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , donc  $\sum_n b_n z^n$  est de rayon de convergence  $+\infty$ , et par le lemme de comparaison asymptotique, on aura

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} t^{3n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n} t^{3n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} t^{3n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (2n)^{-1/6} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} (t^{3/2})^{2n} = 1 + \frac{2^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) S_{-\frac{1}{6}, 2} \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Or  $S_{-\frac{1}{6}, 2} \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)^{-1/6} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}}}{2} = t^{-1/4} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/6} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)$ .

En définitive,  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C t^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)$  où  $C = 3^{1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}$ .