

Première Partie

ÉTUDE DE  $\mathcal{N}_n$



1. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $(x, y) \in \mathbb{C}^n$ . On a :

$$\langle x, Ay \rangle = \overline{\langle Ax, y \rangle} = \overline{\langle x, A^*y \rangle} = \langle A^*x, y \rangle$$

2. a. 2.a Montrons que  $A \in \mathcal{U}_n \Leftrightarrow A^*A = AA^* = I_n$

( $\Rightarrow$ ). Supposons que  $A \in \mathcal{U}_n$ , soit  $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ , on a

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ , en appliquant la première question on a

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*Ax, y \rangle \text{ donc } \langle A^*Ax, y \rangle - \langle x, y \rangle = \langle (A^*A - I_n)x, y \rangle = 0$$

(semi-linéarité par rapport à la première composante), ceci étant vrai

pour tout  $y$  dans  $\mathbb{C}^n$  donc  $(A^*A - I_n)x \in (\mathbb{C}^n)^\perp = \{0\}$ , donc

$(A^*A - I_n)x = 0$  et ceci pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}^n$ , donc  $A^*A = I_n$ , ce qui

entraîne alors que  $A$  est inversible d'inverse  $A^*$  et par suite  $AA^* = I_n$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $A^*A = I_n$ , et soit  $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ . On a

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^*Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

ceci étant vrai pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ , donc  $A \in \mathcal{U}_n$

2.b ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A \in \mathcal{U}_n$ . On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ce qui veut dire que la famille  $(Ae_1, \dots, Ae_n)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que la famille  $(Ae_1, \dots, Ae_n)$  est une base orthonormale

de  $\mathbb{C}^n$  et soit  $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$  tel que :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ . On a

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i Ae_i, \sum_{j=1}^n y_j Ae_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \overline{x_i} y_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que  $A \in \mathcal{U}_n$

3. 3.a Supposons que  $A \in \mathcal{N}_n$ . Soit  $y \in \mathcal{I}mA^*$  donc il existe  $a \in \mathbb{C}^n$  tel que  $y = A^*a$ . Soit  $x \in \ker A$ , alors on a  $\langle y, x \rangle = \langle A^*a, x \rangle = \langle a, Ax \rangle = 0$ ,

ce qui entraîne que  $\mathcal{I}mA^* \subset (\ker A)^\perp$  et par le théorème du rang on conclut que (\*\*\*)  $(\ker A)^\perp = \mathcal{I}mA^*$  et comme  $A$  et  $A^*$  commutent alors  $\mathcal{I}mA^*$  est stable par  $A$ , d'où le résultat

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $E_\lambda$  le sous espace propres associé. Si on pose  $B = A - \lambda.I_n$ , donc  $B^* = A^* - \lambda.I_n$ , alors il est clair que  $A$  et  $B^*$  commutent donc, alors l'image de  $B^*$  serait stable par  $A$ , c'est à dire que  $\mathcal{I}mB^* = \ker(A - \lambda.I_n)^\perp$  (\*\*\*) est stable par  $A$  d'où le résultat

3.b Soit  $U \in \mathcal{U}_n$  et  $D \in \mathcal{D}_n$ , on a  $(UDU^*)^* = U\overline{D}U^*$  et par suite  $(UDU^*)(U\overline{D}U^*) = U\overline{D}DU^*$  et  $(U\overline{D}U^*)(UDU^*) = U\overline{D}DU^*$  et comme  $\overline{D}D = D\overline{D}$  car elles sont diagonales, alors  $UDU^*$  est un élément de  $\mathcal{N}_n$ . Pour la réciproque on va raisonner sur les endomorphismes et par récurrence sur  $n$

Pour  $n = 1$ , on a rien à montrer

Soit  $n \geq 2$ , supposons que le résultat est vrai pour tout  $k \geq n - 1$  et montrons le à l'ordre  $n$ . Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{N}_n$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$ , on a bien  $uou^* = u^*ou$ . Le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  soit alors  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On a vu que  $(E_\lambda)^\perp$  est stable par  $u$ , si on désigne par  $u_{E_\lambda}$  l'endomorphisme de  $E_\lambda$  induit par  $u$  sur  $(E_\lambda)^\perp$ , d'après le cours  $u_{(E_\lambda)^\perp}^* = (u^*)_{(E_\lambda)^\perp}$  et par suite  $u_{(E_\lambda)^\perp}$  et son adjoint commutent. Ceci d'une part, d'autre part la dimension de  $(E_\lambda)^\perp$  est inférieure ou égale à  $n - 1$ , donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe une base orthonormale  $B_1$  de  $E_\lambda^\perp$  qui diagonalise  $u_{E_\lambda^\perp}$ . Si  $B_2$  désigne une base de  $E_\lambda$ , alors la base  $B = B_1 \cup B_2$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$  de diagonalisation de  $u$ . La matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  à la base  $B$  est une matrice de  $\mathcal{U}_n$  car  $B$  est la famille de ses vecteurs colonnes d'où le résultat à l'ordre  $n$ . La récurrence est alors achevée

4. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, non nécessairement distinctes. On suppose que  $A \in \mathcal{U}_n$ . On a  $AA^* = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , avec

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{ik}A_{kj}^* = \sum_{k=1}^n A_{ik}\overline{A_{kj}}$$

Et par conséquent  $tr(AA^*) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)$ . Or la matrice  $A$  est dans  $\mathcal{U}_n$

, donc il existe  $U \in \mathcal{U}_n$  et une matrice  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  telles que  $A = UDU^*$  et par suite  $AA^* = UD\bar{D}U^*$ . Or  $D\bar{D} = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$

et par suite  $\text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ , d'où l'égalité demandée

5. 5.a Soit  $A \in \mathcal{N}_n$ . Soit  $x \in \mathbb{C}^n$ , on a  
 $\|Ax\| = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^*Ax \rangle = \langle x, AA^*x \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle = \|A^*x\|$   
 On en déduit alors l'équivalence :

$$\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \|A^*x\| = 0$$

Et par suite on a  $A$  et  $A^*$  ont même noyau

- 5.b ((i)  $\Rightarrow$  (ii)). Supposons que  $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ , soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , alors  $A - \lambda I_n$  est aussi un élément de  $\mathcal{N}_n$ , donc d'après la question précédente on a  $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^* - \bar{\lambda} I_n)$ , ce qui est équivalent de dire que tout vecteur propre de  $A$  est un vecteur propre de  $A^*$

((ii)  $\Rightarrow$  (i)) Supposons que tout vecteur propre de  $A$  est un vecteur propre de  $A^*$ . Raisonnons par récurrence sur  $n$  si  $n = 1$ , c'est clair. Soit  $n \geq 2$  supposons que le résultat est vrai à l'ordre  $n - 1$ , montrons le à l'ordre  $n$ , soit alors une matrice  $A$  d'ordre  $n$  vérifiant (ii) dont l'endomorphisme canoniquement associé est  $u$ , soit  $x$  un vecteur propre commun à  $u$  et  $u^*$ , posons  $F = \text{Vect}(x)$ , il est clair que  $F$  est stable par  $u$  et par  $u^*$ , donc  $F^\perp$  est stable par  $u$  et par  $u^*$ , notons  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F^\perp$ , soit  $z \in F^\perp$  un vecteur propre de  $v$ , donc c'est un vecteur propre de  $u$  donc de  $u^*$  et par suite  $z$  est un vecteur de  $F$ , donc  $v$  vérifie (ii), donc par l'hypothèse de récurrence l'endomorphisme  $v$  vérifie  $vv^* = v^*v$  ceci d'une part d'autre part on a  $uou^*(x) = u^*ou(x)$  donc les deux endomorphismes  $uou^*$  et  $u^*ou$  sont égaux sur  $F$  et sur  $F^\perp$  donc  $uou^* = u^*ou$  et par suite  $AA^* = A^*A$ , d'où le résultat à l'ordre  $n$

6. 6.a Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{N}_n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs complexes distinctes deux à deux de  $A$  de multiplicités respectivement  $m_1, \dots, m_r$  et soit  $(L_1, \dots, L_r)$  la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , posons  $L = \sum_{k=1}^r \bar{\lambda}_k L_k$ , alors

il est clair que  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $L(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ . Or  $A = UDU^*$  avec  $U \in \mathcal{U}_n$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , il est alors facile de voir que  $A^* = P(A)$

- 6.b Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{N}_n$  tels que  $AB = BA$ , on vérifie facilement que les polynômes de  $A$  commutent avec les polynômes de  $B$ . D'après la question précédente il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  tels que  $P(A) = A^*$  et  $Q(B) = B^*$ . On a  
 $(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = ABQ(B)P(A) = Q(B)P(A)AB$   
 $= (AB)^*(AB)$  ce qui montre alors que  $AB \in \mathcal{N}_n$

7. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

((i)  $\Rightarrow$  (ii)) Supposons que  $A \in \mathcal{N}_n$ .

Si  $A$  est inversible, alors il suffit de prendre  $U = A^{-1}A^*$ , il est facile à vérifier que  $U$  est un élément de  $\mathcal{U}_n$

Si  $A$  n'est pas inversible, donc elle admet 0 comme valeur propre. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres non nulles de  $A$  et  $V$  un élément de  $\mathcal{U}_n$  tel que  $A = VDV^*$  tel que  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ , on a  $A^* = VD^*V^*$ . On a

$$D^* = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 1, \dots, 1\right) \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r, 1, \dots, 1)$$

On a

$$\begin{aligned} A^* &= VD \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 1, \dots, 1\right) \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r, 1, \dots, 1) \\ &= VDV^* \left( V \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 1, \dots, 1\right) \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r, 1, \dots, 1) \right) = AU \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $U$  est dans  $\mathcal{U}_n$ . On a

$$UU^* = V \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 1, \dots, 1\right).$$

$$\text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r, 1, \dots, 1) \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 1, \dots, 1\right) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 1, \dots, 1) V^* = I_n$$

, d'où le résultat

((ii)  $\Rightarrow$  (i)). Supposons que  $A^* = AU$  avec  $U \in \mathcal{U}_n$ , on a  $AU = A^*$ , donc  $A = U^*A^*$  et par suite  $UA = UU^*A^* = A^* = AU$  et par suite  $A$  et  $U$  commutent, donc  $AA^* = AAU = AUA = UAA = AUA = A^*A$  ce qui veut dire que  $A \in \mathcal{N}_n$

Deuxième Partie

VALEURS SINGULIÈRE D'UNE MATRICE



8. (i) Supposons que  $A \in \mathcal{H}_n$ , alors  $A = A^*$  et par suite  $A.A^* = A^*.A$  c'est à dire  $A \in \mathcal{N}_n$ , donc la matrice  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$ , de plus remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$ , on a  $\langle Ax, x \rangle$  est un réel, en effet on a  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$   
 Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $x$  un vecteur propre associé, on a  
 (1) :  $\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda.x, x \rangle = \bar{\lambda}||x||^2$  et  
 (2) :  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda.x \rangle = \lambda.||x||^2$ , comme  $x \neq 0$ , alors, (1) et (2) entraine que  $\bar{\lambda} = \lambda$ , c'est à dire que  $\lambda$  est un réel. Si de plus  $A$  est dans  $\mathcal{H}_n^+$ , alors  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ , c'est à dire que  $\lambda||x||^2 \geq 0$ , donc  $\lambda \geq 0$
- (ii) Supposons que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$  et que ses valeurs propres sont réelles., alors il existe  $U \in \mathcal{U}_n$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale réelle telle que  $A = U.D.U^*$ , donc  $A^* = U.D^*.U^* = U.D.U^* = A$  car  $D$  est une matrice diagonale réelle donc  $D^* = D$ , d'où  $A \in \mathcal{H}_n$ . Si de plus les valeurs propres de  $A$  sont toutes positives, alors on a  
 $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle Ax, x \rangle = \langle U.D.U^*x, x \rangle = \langle D.U^*x, U^*x \rangle$   
 Si on pose  $U^*x = (y_1, \dots, y_n)$ , alors  

$$\langle D.y, y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k.y_k^2 \geq 0 \text{ car } \lambda_k \geq 0$$
  
 Donc  $A$  est dans  $\mathcal{H}_n^+$
9. Soit  $A \in \mathcal{H}_n^+$ , alors il existe une matrice  $U \in \mathcal{U}_n$  et une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  à coefficients positifs telle que  $A = UDU^* = U\Delta^2U^*$  avec  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , on pose alors  $S = U\Delta.U^*$ , alors il est clair que  $A = S^2$  et que  $S \in \mathcal{H}_n^+$  d'après la question précédente.  
 Montrons l'unicité :  
 Soit  $S'$  une autre matrice de  $\mathcal{H}_n^+$  vérifiant  $S'^2 = A$ . On sait que  $A$  est diagonalisable, donc  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$ , Soit  $\lambda \in Sp(A)$ , alors on a

$A_{E_\lambda(A)} = \lambda.I_{E_\lambda(A)}$ , donc :

$$\left( S'_{E_\lambda(A)} - \sqrt{\lambda}.I_{E_\lambda(A)} \right) \left( S'_{E_\lambda(A)} + \sqrt{\lambda}.I_{E_\lambda(A)} \right) = 0 (*)$$

Et comme les valeurs propres de  $S'$  sont positives, alors  $-\sqrt{\lambda}$  n'est pas une valeur propre de  $S'_{E_\lambda(A)}$  et par suite  $S'_{E_\lambda(A)} + \sqrt{\lambda}.I_{E_\lambda(A)}$  est inversible donc (\*) entraine que  $S'_{E_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda}.I_{E_\lambda(A)}$

Si  $\lambda = 0$ , alors  $A_{E_0(A)} = 0$  c'est à dire  $S'^2_{E_0} = 0$ . et par suite  $S'_{E_0}$  est nilpotente et diagonalisable (car c'est un élément de  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{N}_n$ ), donc  $S'_{E_0} = 0$ . Donc  $\forall \lambda \in Sp(A), S'_{E_\lambda(A)} = S_{E_\lambda(A)}$ , donc  $S = S'$  et par suite l'unicité de  $S$

10. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , donc  $A = U'S$  avec  $U' \in \mathcal{U}_n$  et  $S \in \mathcal{H}_n^+$ . La matrice  $S$  étant diagonalisable dans une base orthonormale et dont les valeurs propres sont positives, donc il existe une matrice  $V$  de  $\mathcal{U}_n$  et une matrice diagonale  $D$  à coefficients positifs telles que  $S = VDV^*$  et par suite  $A = U'VDV^*$ , si on pose  $W = V^*$  et  $U = U'V$ , alors il est clair que  $U$  et  $W$  sont des éléments de  $\mathcal{U}_n$  ( $\mathcal{U}_n$  est un sous groupe de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ )
11. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et  $A = U'S$  sa décomposition polaire, alors il existe  $V$  et  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , telle que  $S = VDV^*$  et quitte à réordonner la base de diagonalisation de  $S$  on peut supposer que  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ , donc la décomposition en valeurs singulières  $A = U'VDV^*$  répond à la question. Montrons l'unicité des  $\alpha_i$ . Supposons  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  une autre famille des valeurs singulières de  $A$ . On a  
 $A = U \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) W$  (1) et (2)  $A = U_1 \text{diag}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) W'$   
 On en déduit alors que entraine que  
 $AA^* = U \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2) .U^* = U_1 \text{diag}(\alpha'^2_1, \dots, \alpha'^2_n) U'^*_1$   
 , donc par unicité du spectre de  $AA^*$  et vue les inégalités  

$$\begin{cases} (\alpha_1)^2 \geq (\alpha_2)^2 \geq \dots \geq (\alpha_n)^2 \\ (\alpha'_1)^2 \geq (\alpha'_2)^2 \geq \dots \geq (\alpha'_n)^2 \end{cases} \text{ alors } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\alpha_i)^2 = (\alpha'_i)^2 \text{ et comme}$$
  
 ses coefficients sont positifs, alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \alpha_i = \alpha'_i$ , d'où l'unicité

## Troisième Partie

## INÉGALITÉ DES TRACES



12. Soit  $P$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant :

$$(\mathcal{P}_k) : P^2 = P = P^* , \text{rag}(P) = k$$

12.a L'égalité  $P = P^2$  veut dire que  $P$  est une matrice de projection donc sa

trace c'est son rang c'est à dire  $\sum_{i=1}^n P_{ii} = k$

On a  $P^*P = P$  donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  ,  $[P^*P]_{ii} = [P]_{ii}$ , c'est à dire

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ,  $[P]_{ii} = \sum_{k=1}^n |[P]_{ki}|^2$  et par suite

$$[P]_{ii} - ([P]_{ii})^2 = \sum_{k=1, k \neq i}^n |[P]_{ki}|^2 \geq 0$$

ce ci entraîne alors que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  ,  $[P]_{ii} \in [0, 1]$

12.b On a :

$$[PD]_{ii} = \sum_{k=1}^n [P]_{ik}[D]_{ki} = \lambda_i [P]_{ii} \text{ et par suite}$$

$$\text{tr}(PD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [P]_{ii}$$

On a :

$$\text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i ([P]_{ii} - 1) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i [P]_{ii}$$

$$\text{Donc : } \text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \lambda_k \left( \sum_{i=1}^k ([P]_{ii} - 1) \right) + \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^n [P]_{ii}$$

car  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  ,  $\lambda_i \geq \lambda_k$  et

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket , \lambda_i \leq \lambda_{k+1}$$

Donc

$$\text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \lambda_k \left( \sum_{i=1}^k [P]_{ii} - 1 \right) + \lambda_{k+1} \left( \sum_{i=1}^n [P]_{ii} - \sum_{i=1}^k [P]_{ii} \right)$$

Ce qui est équivalent de dire :

$$\text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \lambda_k \left( \sum_{i=1}^k ([P]_{ii} - 1) \right) + \lambda_{k+1} \left( k - \sum_{i=1}^k [P]_{ii} \right) . \text{Donc}$$

$$\text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \lambda_k \left( \sum_{i=1}^k ([P]_{ii} - 1) \right) + \lambda_{k+1} \left( \sum_{i=1}^k (1 - [P]_{ii}) \right) . \text{C'est à dire :}$$

$$\text{tr}(PD) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \left( \sum_{i=1}^k ([P]_{ii} - 1) \right) \leq 0$$

Car  $\sum_{i=1}^n [P]_{ii} = 1$  et les  $[P]_{ii}$  sont positifs, d'où le résultat

La matrice  $J_k = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_r, 0, \dots, 0)$  avec  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  ,  $\gamma_i = 1$

vérifie la propriété  $\mathcal{P}_k$  et on a  $\text{tr}(PD) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$

12.c Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $\mathcal{P}_k$ . Soit  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  ,  $P_i$  est une matrice d'une projection donc  $\text{Sp}(P_i) \subset \{0, 1\}$  et comme  $P_i = P_i^*$ , alors il diagonalisable dans une base orthonormale de  $\mathbb{C}$  et par suite elle est unitairement semblable à la matrice  $J_k$  définie avant, c'est à dire il existe une matrice  $U_i \in \mathcal{U}_n$  telle que  $P_i = U_i J_k U_i^*$  et par suite  $P_2 = U P_1 U^*$  avec  $U = U_2 U_1^*$  qu'est un élément de  $\mathcal{U}_n$ . Soit  $P$  une matrice vérifiant  $\mathcal{P}_k$ . Remarquons d'abord que :

$$\{ \text{tr}(UPU^*D) , U \in \mathcal{U}_n \} = \{ \text{tr}(QD) \text{ avec } Q \text{ vérifie } \mathcal{P}_k \}$$

(conséquence de ce qui précédente). Donc en utilisant la ques-

tion précédente on a  $\sum_{i=1}^k \lambda_i$  est un majorant de l'ensemble

$\{ \text{tr}(UPU^*D) , U \in \mathcal{U}_n \}$  et comme cette somme est atteinte à la matrice  $J_k$  alors c'est le maximum de l'ensemble  $\{ \text{tr}(UPU^*D) , U \in \mathcal{U}_n \}$

13. Soit  $U \in \mathcal{U}_n$ , donc la famille de ses vecteurs colonnes (resp vecteurs lignes car  $U^*$  est aussi dans  $\mathcal{U}_n$ ) est une base orthonormale de  $\mathbb{C}^n$  et par suite

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket , \sum_{i=1}^n |U_{ik}|^2 = \sum_{j=1}^n |U_{kj}|^2 = 1 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 |U_{ij}| \in \mathbb{R}^+ , \text{ d'où}$$

le résultat

14. Soit  $A$  une matrice doublement stochastique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  deux famille décroissantes de réels. On suppose

que  $A \neq I_n$ , donc il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_{ii} \neq 1$ , on pose  
 $k = \min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{kk} \neq 1\}$

14.a Montrons d'abord que  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Supposons que  $k = n$ , alors dans ce cas la matrice  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice est doublement stochastique alors la somme des coefficients de la  $n^{me}$  ligne vaut 1 c'est à dire que  $A_{nn} = 1$  ce qui contredit la définition de  $k$ , donc  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

.Si  $k = 1$ , alors on sait que  $\sum_{i=1}^n a_{i1} = 1$  si on suppose que

$\forall m > 1, A_{m1} = 0$  alors comme la matrice est doublement stochastique, alors forcément  $A_{11} = 1$  ce qu'est absurde, donc  $\exists m > 1, A_{m1} \neq 0$  de même il existe  $l > 1, a_{1l} \neq 0$ , si  $A_{ml} = 1$ , alors tous les éléments qui figurent dans la  $m$  eme ligne sont nulle y compris  $A_{m1}$  ce qu'est absurde

.Supposons que  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{kk} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{nk} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Si on suppose que  $\forall m > k, A_{mk} = 0$ , alors nécessairement  $A_{kk} = 1$  ce qu'est absurde, donc  $\exists m > k, A_{mk} \neq 0$ , de même si on suppose que  $\forall l > k, A_{kl} = 0$ , alors  $A_{kk} = 1$  ce qui est absurde.

En conclut alors que

$$\exists(m, l) \in \llbracket k+1, n \rrbracket^2, A_{mk} \neq 0, A_{kl} \neq 0 \text{ et } A_{ml} \neq 1$$

14.b Pour  $(i, j) \in \{(k, k), (m, k), (k, l), (m, l)\}$ ,  $A'_{ii} = A_{ij}$  il fait alors calculer les autres coefficients à savoir  $A'_{kk}, A'_{mk}, A'_{kl}$  et  $A'_{ml}$

On a  $A'_{kk} = 1 - \sum_{j=1, j \neq k}^n A'_{kj}$  donc

$$A'_{kk} = 1 - \left( \sum_{j=0, j \neq k, j \neq l}^n A'_{kj} \right) - A'_{kl} = 1 - \left( \sum_{j=1}^n A_{kj} - A_{kk} - A_{kl} - A'_{kl} \right)$$

Et par suite (\*) :  $A'_{kk} + A'_{kl} = A_{kk} + A_{kl}$

On a  $A'_{mk} + A'_{ml} = 1 - \sum_{j=1, j \neq k, j \neq l}^n A'_{mj}$

$$= 1 - \sum_{j=1, j \neq k, j \neq l}^n A_{mj} = 1 - \left( \sum_{j=1}^n A_{mj} - A_{mk} - A_{ml} \right) = A_{mk} + A_{ml}$$

Donc (\*\*):  $A'_{mk} + A'_{ml} = A_{mk} + A_{ml}$

Et comme la condition (ii) nous donne le droit de choisir l'un des coefficient  $A'_{mk}$  ou  $A'_{kl}$  nul, choisissant par exemple  $A'_{kl} = 0$ , donc (\*) entraine que  $A'_{kk} = A_{kk} + A_{kl}$

On a  $A'_{ml} = 1 - \sum_{i=1, i \neq m}^n A'_{il} = 1 - \left( \sum_{i=1, i \neq m, i \neq k}^n A_{il} \right) + A'_{kl}$  et par suite

on a :

$$A'_{ml} = 1 - \left( \sum_{i=1}^n A_{il} - A_{ml} - A_{kl} \right) = A_{ml} + A_{kl}$$

Et (\*\*) entraine que  $A'_{mk} = A_{mk} + A_{ml}$

Posons  $\mathcal{J} = \{(k, k), (m, k), (k, l), (m, l)\}$  On a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j A'_{ij} = \sum_{(i, j) \notin \mathcal{J}} \alpha_i \beta_j A'_{ij} + \alpha_k \beta_k A'_{kk} + \alpha_m \beta_k A'_{mk} + \alpha_k \beta_l A'_{kl} + \alpha_m \beta_l A'_{ml}$$

En remplaçant  $A'_{kk}, A'_{mk}$  et  $A'_{ml}$  par les valeurs trouvées avant on a

$$\sum_{i, j} \alpha_i \beta_j A'_{ij} - \sum_{i, j} \alpha_i \beta_j A_{ij} = \alpha_m \beta_k A_{ml} + \alpha_m \beta_l A_{kl} + \alpha_k \beta_k A_{kl} \geq 0$$

Montrons maintenant que  $\forall A \in \mathcal{DS}_n, \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j A_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j$ .

Raisonnons par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , le résultat est vérifié. Soit  $n \geq 2$  supposons que le résultat est vrai jusqu'au rang  $n - 1$ . Soit  $A$  une matrice doublement stochastique d'ordre  $n$ . Si  $A = I_n$ , le résultat est clair, supposons alors que  $A \neq I_n$ , et reprenons les notations des questions (14.a) et (14.b). La matrice  $A'' \neq I_n$ , en effet, on a  $A''_{kk} \neq 1$  car si non, alors  $A''_{mk} = 0$ , or  $A''_{mk} = A_{mk} + A_{ml} > 0$  ce qu'est absurde car par définition de  $m$ , on a  $A_{mk} > 0$  et  $A_{ml} \geq 0$ , donc  $A''_{kk} \neq 1$  et par suite  $A''$  est de la forme :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A''_{kk} & \dots & A''_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A''_{nk} & \dots & A''_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} A''_{kk} & \dots & A''_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A''_{nk} & \dots & A''_{nn} \end{pmatrix}$$

est d'ordre  $n - k + 1$  et doublement stochastique. En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $M$  on a :

$$\sum_{i,j=k}^n \alpha_i \beta_j A''_{ij} \leq \sum_{i=k}^n \alpha_i \beta_i$$

On a  $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j A''_{ij} = \sum_{i,j=1}^{k-1} \alpha_i \beta_j A''_{ij} + \sum_{i,j=k}^n \alpha_i \beta_j A''_{ij}$ . Or on a  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket^2$ ,  $A''_{ij} = \delta_{ij}$

Et par suite  $\sum_{i,j=1}^{k-1} \alpha_i \beta_j A''_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i$ , donc

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j A_{ij} \leq \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j A''_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

D'où le résultat à l'ordre  $n$

15. 15.a Soit  $U_1$ , et  $V_1$  deux éléments de  $\mathcal{U}_n$  telle que  $A = U_1 D V_1$  et  $U_2$  et  $V_2$  deux éléments de  $\mathcal{U}_n$  tels que  $B = U_2 T V_2$ , donc on a  $AB = U_1 D V_1 U_2 T V_2$  ce qui entraîne alors que

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(U_1 D V_1 U_2 T V_2) = \text{tr}(V_2 U_1 D V_1 U_2 T)$$

Il suffit de poser  $U = V_2 U_1 \in \mathcal{U}_n$  et  $V = V_1 U_2 \in \mathcal{U}_n$

- 15.b On a  $UDVT = (C_{ij})_{i,j}$  telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, C_{ij} = \sum_{k=1}^n [UD]_{ik} [VT]_{kj}$$

$$\text{Avec } [UD]_{ik} = \sum_{l=1}^n U_{il} D_{lk} = U_{ik} \alpha_k \text{ et } [VT]_{kj} = \sum_{p=1}^n V_{kp} T_{pj} = V_{kj} \beta_j,$$

donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, C_{ij} = \sum_{k=1}^n U_{ik} \alpha_k V_{kj} \beta_j$$

Et par suite  $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ik} V_{ki} \alpha_k \beta_i$ . Comme

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |U_{ik} V_{ki}| \leq \frac{1}{2} (|U_{ik}|^2 + |V_{ki}|^2)$$

Alors on a :

$$\text{tr}(AB) \leq \sum_{i,k} \frac{1}{2} (|U_{ik}|^2 \alpha_k \beta_i + |V_{ki}|^2 \alpha_k \beta_i) \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \beta_i + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \beta_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \beta_i$$

(car les matrices  $(|U_{ik}|^2)_{1 \leq i, k \leq n}$  et  $(|V_{ki}|^2)_{1 \leq k, i \leq n}$  sont doublement stochastiques

- 15.c Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{H}_n^+$ . D'après la question (8) il existe deux matrices  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{U}_n$  et deux matrices diagonales à coefficients diagonaux positifs noté  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $T = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$  avec  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  et  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ , tel que  $A = U D U^*$  et  $B = V T V^*$ . les valeurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont les valeurs singulières de  $A$  et  $\beta_1, \dots, \beta_n$  celles de  $B$ , donc d'après la question précédente

$$\text{on a } \text{tr}(AB) \leq \sum_{\alpha_i \beta_i} \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^n \beta_j \right) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

16. Soit  $U$  un élément de  $\mathcal{U}_n$ , on va suivre l'indication donnée par l'énoncé, on a  $\text{tr}(AU^*BU) = \langle AU^*BU \rangle$  avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associé à la norme  $\|\cdot\|$ , comme  $B$  et  $U^*BU$  sont semblables, alors elles ont même valeurs singulière et par suite d'après la question (15.b), on a  $tr(AU^*BU) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ , donc  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$  est un majorant de l'ensemble  $\{tr(AU^*BU), U \in \mathcal{U}_n\}$ . Soient  $V, W$  deux éléments de  $\mathcal{U}_n$  telles que  $V^*AV = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = D$  et  $W^*BW = diag(\beta_1, \dots, \beta_n) = T$ . On a  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = tr(DT) = tr(V^*AVW^*BW) = tr(AVW^*BWV^*) = tr(AU^*BU)$  avec  $U = VW^*$ , et par suite  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \max_{U \in \mathcal{U}_n} tr(AU^*BU)$ . les égalités de (\*) nous donne (\*\*):

$$\begin{aligned} \|A - (WV^*)^*BWV^*\| &= \|A - VW^*BWV^*\| = \|V(V^*AV - W^*BW)V^*\| \\ &= \|D - T\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2} \end{aligned}$$

C'est grace à la remarque suivante

$$(***) : \forall U \in \mathcal{U}_n, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AU\| = \|UA\| = \|A\|$$

(Vérification facile)

Soit  $U \in \mathcal{U}_n$ , on a :

$$\|A - U^*BU\|^2 = \|A\|^2 - 2\langle A, U^*BU \rangle + \|U^*BU\|^2 = \|A\|^2 - 2\langle A, U^*BU \rangle + \|B\|^2$$

(d'après la remarque (\*\*)), et comme

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{ et } \|B\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \text{ et } \langle A, U^*BU \rangle \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

Alors on déduit que

$$\|A - U^*BU\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$$

Enfin (\*\*), nous permet de conclure

[hfa.ahmed@yahoo.fr](mailto:hfa.ahmed@yahoo.fr)

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES MATRICES DOUBLEMENT STOCHASTIQUES



1. Une matrice  $A$  est stochastique si ses coefficients sont positifs et  $\forall i \in$

$\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n A_{ij} = 1$ , leur ensemble est noté  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Une matrice  $A$  est alors

doublement stochastique si  $A$  et  ${}^tA$  sont stochastique. L'ensemble  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est un convexe compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. Une matrice  $P$  est une matrice doublement stochastique, si, et seulement si, 1 est une valeur propre de  $P$  et  ${}^tP$  avec  $(1, \dots, 1)$  comme vecteur propre associé à 1
3. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont doublement stochastiques, alors  $P_1 P_2$  est aussi doublement stochastique
4. Si  $P$  est stochastique, alors  $\|P\|_\infty = 1$  et  $\rho(P) = 1$
5. Toute matrice de permutation est une matrice doublement stochastique
6. Soient  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  deux suites croissantes de nombres réels, si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on pose  $S_k(a) = a_1 + \dots + a_k$ . On dit que  $a < b$  si, et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $s_k(a) \leq s_k(b)$  et  $s_n(a) = s_n(b)$ . Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors on a l'équivalence suivante :  $\forall x \in \mathbb{C}^n, x < Mx \Leftrightarrow M$  est une matrice doublement stochastique
7. Si on désigne par  $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$  le sous espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  engendré par les matrices doublement stochastique, alors  $\dim \mathcal{E}_n(\mathbb{R}) \leq (n-1)^2$
8. L'ensemble des matrices stochastique réelle est un polyèdre convexe dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et dont les points extrémaux sont les matrices de permutations. On rappelle qu'un point  $A$  est dit point extrémal d'une partie convexe  $C$  d'un espace euclidien  $E$  si tout segment de  $C$  contenant  $A$  admet  $A$  pour extrémité, on montre que  $A$  est un point extrémal de  $C$  si, et seulement si, la partie  $C$  privée de  $A$  reste encore convexe et que toute partie convexe compacte à des points extrémaux et enfin on a le théorème de **KREIN-MILMAN** : tout compact convexe dans  $E$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux
9. **THÉORÈME DE BIRKHOFF**  
Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est doublement stochastique si, et seulement si, elle s'écrit sous la forme  $A = \sum_{k=1}^p \lambda_k P_k$  ou  $p \leq (n-1)^2 + 1$  et les  $P_k$  sont des matrices de permutation et les  $\lambda_k$  sont des réels positifs tel que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$

10. Si  $P$  est une matrice doublement stochastique, alors il existe une permutation  $\sigma$  de  $[[1, n]]$  tel que  $\prod_{i=1}^n P_{\sigma(i)i} > 0$