Maths-2 Mines 2015

A. Norme d'opérateur d'une matrice

1. S^{n-1} est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application norme, donc elle est fermée et comme elle est bornée alors S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$.
L'application réelle $x \in S^{n-1} \longmapsto \| Mx \|$ est continue car elle est la restriction de la composée d'une application linéaire et de l'application nome (1-lipschitzienne). Or S^{n-1} est compact, une telle application est donc bornée et elle atteint ses bornes, d'où l'existence de
$$\| M \|_{\text{op}} = \max \left\{ \| Mx \| \ ; x \in S^{n-1} \right\}$$

2. $\| . \|_{\text{op}}$ est bien définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$
   - **Séparation :** Si $\| M \|_{\text{op}} = 0$, alors pour tout vecteur x de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $Mx = 0$, donc toutes les colonnes de M sont nulles, par suite $M = 0$.
   - **Homogénéité :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in S^{n-1}, \quad \| \lambda Mx \| = |\lambda| \, \| Mx \|$, donc
   $$\| \lambda M \|_{\text{op}} = |\lambda| \, \| M \|_{\text{op}}$$
   - **Inégalité de Minkowski :** Pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et $x \in S^{n-1}$, on a
   $$\| (M+N)x \| = \| Mx + Nx \| \leqslant \| Mx \| + \| Nx \| \leqslant \| M \|_{\text{op}} + \| N \|_{\text{op}}$$
   $\| M \|_{\text{op}} + \| N \|_{\text{op}}$ est un majorant de $\left\{ \| (M+N)x \| \ ; x \in S^{n-1} \right\}$, par définition donc
   $$\| M + N \|_{\text{op}} \leqslant \| M \|_{\text{op}} + \| N \|_{\text{op}}$$

   Ceci justifie que $\| . \|_{\text{op}}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

   En outre, pour $x \in S^{n-1}$, on a bien $\| Mx \| \leqslant \| M \|_{\text{op}}$. En conséquence pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le vecteur $\dfrac{x}{\| x \|} \in S^{n-1}$, on a : $\left\| M \dfrac{x}{\| x \|} \right\| \leqslant M_{\text{op}}$ ou encore $\| Mx \| \leqslant \| M \|_{\text{op}} \| x \|$.
   Cette dernière est aussi vraie pour $x = 0$.
   Finalement pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on utilise l'inégalité précédente en considérant le vecteur $x - y$, il vient
   $$\| Mx - My \| \leqslant \| M(x-y) \| \leqslant \| M \|_{\text{op}} \| x - y \|$$

3. Soit $\lambda \in \sigma(M)$ et x un vecteur propre unitaire de M associé à λ, alors
$$|\lambda| = \| \lambda x \| = \| Mx \| \leqslant M_{\text{op}}$$
Inversement, comme M est symétrique réelle, alors d'après le théorème spectral il existe une BON $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ constituée de vecteurs propres de M et notons λ_i la valeur propre associée à ε_i. Pour $x \in S^{n-1}$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$, il vient alors
$$\| Mx \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i M \varepsilon_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda| \, \| x \| \leqslant \max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda|$$
D'où l'égalité demandée

4. J_n est une matrice réelle symétrique, dont le polynôme caractéristique $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X - n)$.
L'espace propre associé à 0, le noyau de J_n, est de dimension $n-1$ qui est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et c'est aussi l'orthogonal de la droite vectorielle $\mathbf{Vect}((1, \cdots, 1))$, alors l'espace propre associé à n est évidement de dimension 1 qui est la droite $\mathbf{Vect}((1, \cdots, 1))$.
En conséquence, d'après la question précédente, $\| J_n \|_{\text{op}} = n$

5. Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$, on considère e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a
$$\|Me_j\|=\left\|\sum_{k=1}^n M_{k,j}e_k\right\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n M_{k,j}^2}\geqslant |M_{i,j}|$$
Donc $|M_{i,j}|\leqslant \|Me_j\|\leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}$. Ceci vrai pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$, d'où l'inégalité demandée

6. Soit $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in S^{n-1}$, on a $Mx=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j\right)e_i$, donc
$$\begin{aligned}\|Mx\|^2 &= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j\right)^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)}_{=1}\right] \quad \text{Cauchy-Schwartz}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2\end{aligned}$$
Donc pour tout $x\in S^{n-1}$, on a $\|Mx\|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$. Par passage à la borne sup, on a alors l'inégalité demandée.
En outre l'inégalité est une égalité, vu le calcul effectué au dessus, alors il existe un vecteur $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in S^{n-1}$ tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$ l'inégalité de Cauchy Schwartz $\left|\sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$ est une égalité (Avec $x\neq 0$) si et seulement si $\exists\lambda_i\in\mathbb{R}$ tel que la i-ème ligne de M vaut $\lambda_i{}^tx$, c'est-à-dire que $M=y^tx$ où $y=\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i$. On conclut, alors que M est du rang 0 ou 1.
Inversement si $\mathbf{rg}(M)=0$, alors $M=0$ et l'égalité est triviale.
Si $\mathbf{rg}(M)=1$, on peut exprimer $M=y^tx$ avec x de norme 1. Pour tout $z\in S^{n-1}$, on a
$$Mz={}^txz.y\Longrightarrow\|Mz\|=\left|{}^txz\right|\|y\|\leqslant\|y\|$$
Donc $\|M\|_{\mathrm{op}}\leqslant\|y\|$ et elle est atteinte pour $z=x$. Finalement, vu que $M_{i,j}=y_ix_j$, on a
$$\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_i^2x_j^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}=\|y\|$$

7. Soit $M\in\Sigma_n$. D'après la question précédente
$$\|M\|_{\mathrm{op}}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1}=n$$
En conséquence si $\|M\|_{\mathrm{op}}=n$ alors $M_{i,j}^2=1$ pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]^2$. Or d'après la question précédente $\mathbf{rg}(M)=1$ et dont les coefficients sont dans $\{-1,+1\}$, alors on peut écrire $M=\lambda^t\mu$ avec λ et μ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont dans $\{-1,+1\}$.
Inversement si M est de la forme précédente, on a $M\mu={}^t\mu\mu\lambda=n\lambda$
$$\left\|M\frac{\mu}{\|\mu\|}\right\|=\frac{1}{\|\mu\|}\|M\mu\|=\frac{n}{\|\mu\|}\|\lambda\|=n$$

On déduit que $\| M \|_{\text{op}} = n$. Ainsi le nombre de matrices de Σ_n pour lesquelles $\| M \|_{\text{op}} = n$ égale au nombre des couples (λ, μ) de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont dans $\{-1, +1\}$ qui vaut 2^{2n}

B. Variables aléatoires sous-geussiennes

8. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $(2k)! \geqslant 2^k k!$ (récurrence simple), donc par positivité de t^{2k} on obtient

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

9. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Comme $x \in [-1, 1]$, donc $\dfrac{1+x}{2}, \dfrac{1-x}{2} \in [0, 1]$ et de somme 1. D'après l'inégalité de Jensen

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons d'abord que la famille $(\exp(tx)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ de réels positifs est sommable. Pour tout $x \in X(\Omega) \subset [-1, 1]$, on utilise l'inégalité précédente, on obtient :

$$\exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t)\mathbb{P}(X = x) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)\mathbb{P}(X = x)$$

Les deux familles $\left(\dfrac{1+x}{2}\exp(t)\mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ et $\left(\dfrac{1-x}{2}\exp(-t)\mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ de réels positifs sont sommables de sommes respectives $\mathbb{E}\left(\dfrac{1+X}{2}\exp(t)\right) = \dfrac{1}{2}\exp(t)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1-X}{2}\exp(-t)\right) = \dfrac{1}{2}\exp(-t)$, car X est centrée. Donc la famille $(\exp(tx)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leqslant \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = \cosh(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Ainsi par le théorème du transfert $\exp(tX)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\exp(tX)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Lorsque X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, on pose $Y = \dfrac{X}{\alpha}$. La variable Y est bornée par 1 et centrée, donc elle 1-sous-gaussienne, ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\exp(t\alpha Y)) \leqslant \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right)$$

Ou encore $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2\alpha^2}{2}\right)$

11. Soit $t \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires $\exp(t\mu_1 X_1), \cdots \exp(t\mu_n X_n)$ sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance, donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i))$$

Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable X_i est α-sous-gaussienne $E\left(\exp(t\mu_i X_i)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right)$. Donc $\exp(tX)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp(t\mu_i X_i)\right)\\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right)\\
&\leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

12. Soit $t > 0$. L'événement $[X \geqslant \lambda] = [\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)]$. La variable $\exp(tX)$ est positive et admettant une espérance. D'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)\right) &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp(tX)\right)}{\exp(t\lambda)}\\
&\leqslant \exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda\right)
\end{aligned}$$

Remarquons que $-X$ est aussi α-sous-gaussienne et que $[|X| \geqslant \lambda] = [X \geqslant \lambda] \cup [-X \geqslant \lambda]$ où $[X \geqslant \lambda]$ et $[-X \geqslant \lambda]$ sont des événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|X| \geqslant \lambda\right) &= \mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda\right) + \mathbb{P}\left(-X \geqslant \lambda\right)\\
&\leqslant 2\exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda\right)
\end{aligned}$$

Ceci vrai pour tout $t > 0$. En particulier pour $t = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}$, on obtient $\dfrac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda = -\dfrac{\lambda^2}{2\alpha^2}$ et l'inégalité désirée

13. Les variables X et $[X]$ sont positives et vérifient $[X] \leqslant X < [X] + 1$. Par domination, X admet une espérance si, et seulement, si $[X]$ admet une espérance si, et seulement si la série $\sum \mathbb{P}\left([X] \geqslant k\right)$ converge. Mais $[[X] \geqslant k] = [X \geqslant k]$, d'où l'équivalence est assurée.

Pour les inégalités, on tient compte de la croissance et la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left([X]\right) \leqslant \mathbb{E}\left(X\right) \leqslant \mathbb{E}\left([X]\right) + 1$$

où, d'après les données, $\mathbb{E}\left([X]\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X] \geqslant k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$

14. L'inégalité est triviale si $k = 1$: La probabilité d'un événement est inférieure ou égale à 1. Si $k \geqslant 2$, on a $\left[\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right] = \left[|X| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right]$ et d'après la question 12 avec $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}$, on a bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &= \mathbb{P}\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right)\\
&\leqslant 2\exp\left(-\frac{\ln k}{\alpha^2\beta^2}\right) = 2\exp\left(-\ln\left(k^{\alpha^{-2}\beta^{-2}}\right)\right)\\
&= 2k^{-\eta}
\end{aligned}$$

Où $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. Lorsque $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k^{-\eta}$ converge et, par le critère de comparaison, la série ATP $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \geqslant k$ converge, donc la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right) &\leqslant 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)\\ &\leqslant 1+2\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-\eta}=1+2\zeta(\eta)\end{aligned}$$

C. Recouvrements de la sphère

15. Soit $\varepsilon>0$. Montrons qu'il existe $m\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\cdots,x_m\in K$ tels que

$$K\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$$

Supposons le contraire c'est-à-dire $\forall m\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x_1,\cdots,x_m\in K$, on a

$$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$$

Soit $x_1\in K$, alors $K\not\subset B_{x_1,\frac{\varepsilon}{2}}$, donc il existe $x_2\in K$ tel que $x_2\notin B_{x_1,\frac{\varepsilon}{2}}$.
On construit, par récurrence sur $m\in\mathbb{N}^*$, une suite (x_m) de K vérifiant :

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \ x_{m+1}\notin\bigcup_{i=1}^{m}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$$

Par hypothèse, K est compact, donc la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite $\left(x_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans K donc de Cauchy. Alors il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad m\geqslant N\Longrightarrow\left\|x_{\varphi(m+1)}-x_{\varphi(m)}\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $x_{\varphi(m+1)}\in B_{x_{\varphi(m)},\frac{\varepsilon}{2}}\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\varphi(m+1)-1}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$. Ce qui contredit $x_{\varphi(m+1)}\notin\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\varphi(m+1)-1}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$

16. - Par absurde, si Λ n'est pas fini. Soit $x_1\in\Lambda$, l'ensemble $\Lambda\setminus\{x_1\}$ est infini, donc il existe $x_2\in\Lambda\setminus\{x_1\}$, ainsi par récurrence on construit une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de Λ telle que $\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad x_{m+1}\in\Lambda\setminus\{x_1,\cdots,x_m\}$. Par hypothèse K est compact, donc il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergente. En particulier elle est de Cauchy, ainsi il existe $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left\|x_{\varphi(m+1)}-x_{\varphi(m)}\right\|<\varepsilon$. Absurde
    - Soit A un ensemble du type considéré à la question précédente. Tout élément de Λ est contenu dans une boule du type $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ où $a\in A$.
    Inversement, vu que le diamètre de $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ vaut ε, une boule du type $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ où $a\in A$ ne peut contenir qu'au plus un élément de Λ. Donc $\textbf{Card}\Lambda\leqslant\textbf{Card}A$
    - Sinon $K\not\subset\displaystyle\bigcup_{a\in\Lambda}B_{a,\varepsilon}$. Il existe donc $b\in K$ tel que $b\notin\displaystyle\bigcup_{a\in\Lambda}B_{a,\varepsilon}$. Le nouveau ensemble $\Lambda'=\Lambda\cup\{b\}$ est de cardinal $\textbf{Card}\Lambda+1$ et il vérifie pour tous x,y distincts dans Λ', $\|x-y\|>\varepsilon$. Ceci contredit que Λ est de cardinal maximal

17. Soit $x\in B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ où $a\in\Lambda$, alors, par l'inégalité triangulaire

$$\|x\|\leqslant\|x-a\|+\|a\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+1$$

Donc $x\in B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$, d'où l'inclusion $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$.
Posons $\Lambda=\{a_1,\cdots,a_m\}$ avec $\textbf{Card}\Lambda=m$. Les compacts $B_{a_1,\frac{\varepsilon}{2}},\cdots,B_{a_m,\frac{\varepsilon}{2}}$ sont deux à deux disjoints, donc d'après (ii)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m}B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu\left(B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}\right)=m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

D'autre part $\bigcup_{i=1}^{m} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, puisqu'il est union finie de compacts. En outre $\bigcup_{i=1}^{m} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$, donc d'après (iii),

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}\right) \leqslant \mu\left(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

Alors $m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, puis $m \leqslant \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$

18. S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe un ensemble fini A de S^{n-1} tel que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{1}{4}}$. Vu que le diamètre de S^{n-1} vaut 2, alors il existe $x, y \in S^{n-1}$ tels que $\| x-y \| > \frac{1}{2}$, donc il existe un ensemble Λ de S^{n-1} tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\| x-y \| > \varepsilon$. Soit alors Λ_n un tel ensemble de cardinal maximal, d'après 16, on a

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

Enfin, d'après la question 17 , $\mathbf{Card}\Lambda_n \leqslant 5^n$

D. Norme d'une matrice aléatoire

19. • Soit $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j M_{i,j}^{(n)}$ avec $M_{i,1}^{(n)}, \cdots, M_{i,n}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes avec $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$. D'après la question 11 la variable y_i est α-sous-gaussiennes

   • Les variables $y_1, \cdots, y_n$ sont mutuellement indépendantes. En outre pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, d'après la question 14 : l'inégalité d'Orlicz, la variable aléatoire $\exp\left(\gamma y_i^2\right)$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma y_i^2\right)\right) \leqslant 5$. Enfin $\exp\left(\gamma y_1^2\right), \cdots, \exp\left(\gamma y_n^2\right)$ sont mutuellement indépendantes et elles admettent des espérances, donc $\exp\left(\gamma \| y \|^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\gamma y_i^2\right)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma \| y \|^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\gamma y_i^2\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma y_i^2\right)\right) \leqslant 5^n$$

   • Soit $r > 0$, la variable positive $\exp\left(\gamma \| y \|^2\right)$ admet une espérance. D'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\| y \| \geqslant r\sqrt{n}\right) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\gamma \| y \|^2\right) \geqslant e^{\gamma r^2 n}\right) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma \| y \|^2\right)\right)}{e^{\gamma r^2 n}} \leqslant \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \end{aligned}$$

20. Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question 18.
Soit $r > 0$ et supposons que $\left\|M^{(n)}\right\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$. D'après la question 1, il existe $s \in S^{\,n-1}$ tel que : $\left\|M^{(n)}s\right\| = \left\|M^{(n)}\right\|_{\text{op}}$. Soit $a \in \Lambda_n$ tel que : $\|s-a\| \leqslant \frac{1}{2}$.
Par l'inégalité triangulaire

$$\left\| M^{(n)}s \right\| \leqslant \left\| M^{(n)}s - M^{(n)}a \right\| + \left\| M^{(n)}a \right\|$$

Soit

$$\left\| M^{(n)}a \right\| \geqslant \left\| M^{(n)}s \right\| - \left\| M^{(n)}s - M^{(n)}a \right\|$$

On fait appel à l'inégalité de la question 2

$$\left\|M^{(n)}a - M^{(n)}s\right\| \leqslant \left\|M^{(n)}\right\|_{\text{op}} \|a-s\| \leqslant \frac{1}{2}\left\|M^{(n)}\right\|_{\text{op}}$$

alors $\|M^{(n)}a\| \geqslant \frac{1}{2}\left\|M^{(n)}\right\|_{\text{op}} \geqslant r\sqrt{n}$.
Ainsi l'inclusion $\left[\| M^{(n)} \|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\right] \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} \left[\left\| M^{(n)}a \right\| \geqslant r\sqrt{n}\right]$. Par la croissance de la probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\| M^{(n)} \right\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\right) &\leqslant \sum_{a\in\Lambda_n} \mathbb{P}\left(\left\| M^{(n)}a \right\| \geqslant r\sqrt{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{a\in\Lambda_n} \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \\
&\leqslant \mathbf{Card}\Lambda_n \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n
\end{aligned}$$

Avec $\mathbf{Card}\Lambda_n \leqslant 5^n$, on obtient l'inégalité demandée