Mines Ponts, MP, 2000, Deuxième épreuve

1. **Fonction h :**

a. On a $\dfrac{C_{2n}^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \dfrac{(2n)!.\big[(n+1)!\big]^2}{\big[n!\big]^2.(2n+2)!} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$ donc, dé'après la règle de D'Alembert, $\underline{R = \dfrac{1}{4}}$.

b. h est C^∞ sur $]-R,R[$ et on a, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$(1-4x)\,h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_{2n+2}^{n+1}\,x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} nC_{2n}^n\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} - 4n\right)C_{2n}^n\,x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+2-4n)\;C_{2n}^n\,x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^n\,x^n = 2h(x)$$

donc $\underline{h \text{ vérifie l'équation différentielle } (1-4x)y' = 2y \text{ sur } \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[}$.

c. Les solutions de cette équation différentielle homogène sur $\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont données par

$$\exists\, C \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\qquad y(x) = C\exp\left[\int_0^x \frac{2dt}{1-4t}\right] = C\exp\left[-\frac{1}{2}\ln|1-4x|\right] = \frac{C}{\sqrt{1-4x}}\quad .$$

Comme $h(0) = C_0^0 = 1$, il vient : $\underline{\forall x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}}$.

2. **Fonctions M_p :**

On a, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]-,1,1[$, $\quad (1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,t^k$ donc, pour $\alpha = -p$ et $t = -x$, on a $\forall x \in]-,1,1[$, $\quad M_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-k+1)}{k!}\,(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{k!}\,x^k$ soit $\underline{\forall x \in]-,1,1[,\quad M_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}C_{p+k-1}^k\,x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}C_{p+k-1}^{p-1}\,x^k}$.

3. **Fonction f :**

a. $x \in D_f \iff x^2-6x+1 > 0$, soit $\left(x-3-\sqrt{8}\right)\left(x-3+\sqrt{8}\right) > 0$. Donc $\underline{D_f = \left]-\infty, 3-\sqrt{8}\right[\cup \left]3+\sqrt{8},+\infty\right[}$.

b. $\diamond$ Pour que la relation soit vérifiée, il faut que les deux membres de l'égalité soient définis. Il faut donc $x \in D_f$. Mais, pour $x \in D_f$, on a $x \neq 1$ car $3-\sqrt{8} < 1 < 3+\sqrt{8}$, $1 - 4\,\dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{x^2-6x+1}{(1-x)^2} > 0$ donc $\dfrac{x}{(1-x)^2} < \dfrac{1}{4}$ et $1 + 4\,\dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{x^2+2x+1}{(1-x)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{(1-x)^2}$ donc, sauf pour $x = -1$ où on a égalité,

$\dfrac{x}{(1-x)^2} > -\dfrac{1}{4}$. Ainsi, les deux membres sont définis si et seulement si $x \in D_f \setminus \{-1\}$. On peut alors utiliser l'expression de h vue au (**1.c**) :

$$\forall x \in D_f \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1-x}\, h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{1-x}\, \frac{1}{\sqrt{1-4\dfrac{x}{(1-x)^2}}} = \frac{|1-x|}{1-x}\, \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+1}}$$

donc la relation est vérifiée pour $x \in \big(D_f \setminus \{-1\}\big) \cap]-\infty, 1[= \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 3-\sqrt{8}\right[$ et n'est pas vérifiée (car $-f(x) \neq f(x)$) pour $x \in \big(D_f \setminus \{-1\}\big) \cap]1, +\infty[= \left]3+\sqrt{8}, +\infty\right[$.

Donc $\underline{\text{la relation } f(x) = \dfrac{1}{1-x}\, h\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right) \text{ est vérifiée si et seulement si } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 3-\sqrt{8}\right[}$.

$\diamond$ L'ensemble $V = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 3-\sqrt{8}\right[$ est un ouvert contenant 0 donc un voisinage de 0 et, pour tout x appartenant à V, on a $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\, h\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right) = \dfrac{1}{1-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n \left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)^n$ donc $\underline{\exists\, V \in \mathcal{V}(0), \quad \forall x \in V, \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n\, M_{2n+1}(x)\, x^n}$.

c. $\diamond$ $\forall x \in V \cap]-1, 1[, \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n\, x^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_{2n+k}^{2n}\, x^k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_{2n}^n C_{2n+k}^{2n}\, x^{n+k} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=n}^{+\infty} C_{2n}^n C_{n+p}^{2n}\, x^p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p}$ avec $\alpha_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n, \\ C_{2n}^n C_{n+p}^{2n}\, x^p & \text{si } p \geqslant n. \end{cases}$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum |\alpha_{n,p}|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\left(\sum C_{n+p}^{2n}\, |x|^p\right)_{p \geqslant n}$ donc de même nature que $\left(\sum C_{2n+k}^{2n}\, |x|^{n+k}\right)_{k\geqslant 0}$ qui est convergente car $|x| < 1$ et $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} |\alpha_{n,p}| = C_{2n}^n |x|^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_{2n+k}^{2n}\, |x|^k = \dfrac{1}{1-|x|}\, C_{2n}^n \left(\dfrac{|x|}{(1-|x|)^2}\right)^n$. Et, si $|x| \in V$ c'est-à-dire si $x \in \left]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}\right[$, $\left(\sum C_{2n}^n \left(\dfrac{|x|}{(1-|x|)^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La famille $(\alpha_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc sommable si $x \in \left]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}\right[$ et on a donc :

$$\forall x \in \left]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}\right[, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{p} C_{2n}^n C_{n+p}^{2n}\, x^p \qquad (\alpha_{n,p} = 0 \text{ si } n > p)$$

donc $\underline{\forall x \in \left]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}\right[, \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \text{ avec } a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{k+n}^{2k}}$.

$\diamond$ Ce qui précède montre déjà que le rayon de convergence R_a de $\left(\sum a_n\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $R_a \geqslant 3-\sqrt{8}$. Mais, si on avait $R_a > 3-\sqrt{8}$, en posant, pour $x \in]-R_a, R_a[$, $\widetilde{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, on aurait $f(x) = \widetilde{f}(x) \xrightarrow[x \to (3-\sqrt{8})^-]{} \widetilde{f}(3-\sqrt{8})$ ce qui est faux car $f(x) \xrightarrow[x \to (3-\sqrt{8})^-]{} +\infty$.

Donc $\underline{\text{le rayon de convergence de } \left(\sum a_n\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } R_a = 3-\sqrt{8}}$.

d. $\forall x \in D_f, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{2}\, \dfrac{2x-6}{\left(x^2-6x+1\right)^{3/2}} = -\dfrac{x-3}{x^2-6x+1}\, f(x)$ donc $\underline{f \text{ est solution sur } D_f \text{ de l'équation différentielle} \quad (x^2-6x+1)y' + (x-3)y = 0}$.

e. $\diamond$ Or, pour $x \in \left]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}\right[$, $(x^2-6x+1)f'(x) + (x-3)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}\, x^n - 6 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n\, x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}\, x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n - 3 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_1 - 3a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[n a_{n-1} - (6n+3)a_n + (n+1)a_{n+1}\right] x^n$

donc $\underline{(a_n) \text{ vérifie } a_1 = 3a_0 \text{ et, pour } n \geqslant 1, \quad (n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + n a_{n-1} = 0}$.

$\diamond$ On a $a_0 = f(0)$, puis la relation ci-dessus donne $\underline{a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 13, \quad a_3 = 63}$.

4. **Fonction** g :

a. $\diamond$ Montrons existence et unicité de b_n par récurrence sur n : pour $n=0$, on a $b_0 = g(0) = 0$, pour $n=1$, on a $b_1 = g'(0) = 1$ et si b_{n-1} et b_n existent et sont uniques alors il existe une et une seule valeur de b_{n+1} pour que (**R**) soit vérifiée : $b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[3(2n+1)b_n + nb_{n-1}\right]$. Donc les coefficients b_n sont bien déterminés .

$\diamond$ On a immédiatement $b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \dfrac{9}{2}, \quad b_3 = \dfrac{131}{6}$.

$\diamond$ Le calcul effectué au (**3.e**) donne, en notant R_b le rayon de convergence de $\left(\sum b_n\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, si $R_b > 0$:

$$\forall x \in]-R_b, R_b[, \quad (x^2-6x+1)g'(x) + (x-3)g(x) = b_1 - 3b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[nb_{n-1} - (6n+3)b_n + (n+1)b_{n+1}\right] x^n = 1$$

donc si $R_b > 0$, g est solution sur $]-R_b, R_b[$ de l'équation différentielle $\quad (x^2-6x+1)y' + (x-3)y = 1$.

b. Erreur d'énoncé . Il manque l'ensemble de validité de l'égalité.

Soit la fonction $\widetilde{g}$ définie sur $\left]-\infty, 3-\sqrt{8}\right[$ par $\widetilde{g}(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,dt$. f est développable en série entière sur $]-R_a, R_a[$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ aussi et donc $\widetilde{g}$ également. Notons $\widetilde{g}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \widetilde{b}_n\, x^n$ son développement en série entière. On a $\widetilde{g}(0) = 0$, et $\forall x \in]-R_a, R_a[$, $(x^2-6x+1)\widetilde{g}'(x) + (x-3)\widetilde{g}(x) = (x^2-6x+1)\left(f'(x)\int_0^x f(t)\,dt + f^2(x)\right) + (x-3)f(x)\int_0^x f(t)\,dt = (x^2-6x+1)f^2(x) = 1$ donc, avec le calcul fait au (**3.e**), $\begin{cases} \widetilde{b}_0 = 0 \\ \widetilde{b}_1 - 3\widetilde{b}_0 = \widetilde{b}_1 = 1 \\ (n+1)\widetilde{b}_{n+1} - 3(2n+1)\widetilde{b}_n + n\widetilde{b}_{n-1} = 0 \quad \text{si} n \geqslant 1 \end{cases}$ et l'unicité du (**a**) donne $\forall n,\ b_n = \widetilde{b}_n$.
Ceci montre que g existe et $\forall x \in]-R_a, R_a[, \quad g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,dt$.

Remarque : La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation obtenue au (**a**) ne permet d'obtenir $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,dt$ qu'avec la condition $R_b \neq 0$, repoussant ce problème à la question suivante.

c. $\diamond$ En particulier, on a $R_b \geqslant R_a = 3-\sqrt{8}$.

$\diamond$ $\forall x \in]-R_a, R_a[$, $g(x) = \left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right] \times \left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n}\, x^n\right] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{a_{p-1}a_{n-p}}{p}\right] x^n$ donc $b_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{a_{p-1}a_{n-p}}{p}$.

d. Soit $n \geqslant 1$ fixé, on a ,pour $p \in [\![1, n]\!]$, $d_n = p.m_p$ avec $m_p \in \mathbb{N}^*$ et donc $b_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{a_{p-1}a_{n-p}}{p} = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{a_{p-1}a_{n-p}m_p}{d_n}$ donc $d_n b_n = \sum\limits_{p=1}^{n} a_{p-1}a_{n-p}m_p$. Et $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{k+n}^{2k} \in \mathbb{N}^*$ donc $d_n b_n \in \mathbb{N}^*$.

5. **Etude des suites** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. $\diamond$ $u_1 = 1, \quad u_2 = \dfrac{1}{2}$.

$\diamond$ $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = b_{n+1}a_n - b_n a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[3(2n+1)b_n + nb_{n-1}\right] a_n - \dfrac{1}{n+1}\left[3(2n+1)a_n + na_{n-1}\right] b_n = \dfrac{n}{n+1}\left(a_{n-1}b_n - b_{n-1}a_n\right)$ donc $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\, u_n$.

$\diamond$ Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $(n+1)u_{n+1} = nu_n$ et donc la suite $\left(nu_n\right)_{n\geqslant 1}$ est constante donc $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{n}$.

Donc $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, positive et $\operatorname*{Sup}\limits_{n\geqslant 1} u_n = 1$.

b. $\diamond$ la suite $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}^*$ [cf (**4.d**)].

$\diamond$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n-1}b_n - b_{n-1}a_n}{a_n a_{n-1}} = \dfrac{u_n}{a_n a_{n-1}} > 0$ donc $\underline{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

$\diamond$ De plus, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leqslant \dfrac{C}{a_n a_{n-1}}}$.

$\diamond$ Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{k+n}^{2k} \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leqslant \dfrac{C}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{C}{n^2}$ et la série $\left(\sum \dfrac{C}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc la série $\left(\sum \left[\dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également ce qui équivaut au fait que $\underline{\text{la suite } \left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

6. Détermination de la limite λ :

a. $\diamond$ $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{3-x}{\left(x^2-6x+1\right)^{3/2}}$ donc $\underline{f \text{ est croissante sur } \left]-\infty, 3-\sqrt{8}\right[}$. D'autre part, pour $x \in]-R_a, R_a[$, $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_{n+1}\, x^n$ avec $b_{n+1} > 0$ donc $\forall x \in]0, R_a[,\ g'(x) > 0$ et $\underline{g \text{ est croissante sur } \left[0, 3-\sqrt{8}\right[}$.

$\diamond$ $\underline{f(x) \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty}$ est évident et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(x-3-\sqrt{8}\right)\left(x-3+\sqrt{8}\right)}} \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{8}\left(3-\sqrt{8}-x\right)}}$ donc $\int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,dt$ existe. On a donc $\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} \int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,dt > 0$ et donc, puisque $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,dt$, $\underline{g(x) \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty}$.

Remarque : Ceci montre, comme au (**3.c**), que $R_b = 3-\sqrt{8}$.

b. ERREUR D'ÉNONCÉ : L'intervalle doit être ouvert en 0 car $U_N(0) = 0$.

Pour $x \in \left]0, 3-\sqrt{8}\right[$, $V_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} b_n\, x^n = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{b_n}{a_n}\, a_n\, x^n$. Or, pour$n \geqslant N+1$, $\lambda - \varepsilon \leqslant \dfrac{b_n}{a_n} \leqslant \lambda + \varepsilon$ et $a_n\, x^n > 0$ donc $(\lambda-\varepsilon)\, a_n\, x^n \leqslant b_n\, x^n \leqslant (\lambda+\varepsilon)\, a_n\, x^n$ donc, en sommant, $(\lambda-\varepsilon)\, U_N(x) \leqslant V_N(x) \leqslant (\lambda+\varepsilon)\, U_N(x)$ soit, en divisant par $U_N(x) > 0$, $\underline{\forall x \in \left]0, 3-\sqrt{8}\right[,\quad \lambda - \varepsilon \leqslant \dfrac{V_N(x)}{U_N(x)} \leqslant \lambda + \varepsilon}$.

c. $\diamond$ f_N et g_n sont des fonctions polynômes qui sont donc continues sur $\left[0, 3-\sqrt{8}\right]$ donc bornées et il suffit de prendre $A_N = \max\left(\|f_N\|_\infty, \|g_N\|_\infty\right)$ pour avoir le résultat voulu :
$\underline{\forall N \in \mathbb{N},\quad \exists\, A_N \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \left[0, 3-\sqrt{8}\right],\qquad |f_N(x)| \leqslant A_N \quad \text{et} \quad |g_N(x)| \leqslant A_N}$.

$\diamond$ Pour $x \in \left]0, 3-\sqrt{8}\right[$, $f(x) \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda\right| = \left|\frac{g_N(x)}{f(x)} + \frac{V_N(x)}{f(x)} - \lambda\right| &= \left|\frac{g_N(x)}{f(x)} + \frac{V_N(x)}{U_N(x)}\frac{f(x)-f_N(x)}{f(x)} - \lambda\right| \\ &\leqslant \left|\frac{V_N(x)}{U_N(x)} - \lambda\right| + \left|\frac{g_N(x)}{f(x)}\right| + \left|\frac{f_N(x)}{f(x)}\right|\left|\frac{V_N(x)}{U_N(x)}\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{A_N}{f(x)}\,(1+\lambda+\varepsilon)\end{aligned}$$

et $\dfrac{A_N}{f(x)}\,(1+\lambda+\varepsilon) \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \left[\alpha, 3-\sqrt{8}\right[,\ \dfrac{A_N}{f(x)}\,(1+\lambda+\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et alors $\forall x \in \left[\alpha, 3-\sqrt{8}\right[,\ \left|\dfrac{g(x)}{f(x)} - \lambda\right| \leqslant 2\varepsilon$. Donc $\underline{\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} \lambda}$.

d. Or $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to\left(3-\sqrt{8}\right)^-}{\longrightarrow} \int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,dt = \dfrac{\ln 2}{2}$ [cf (**a**) pour l'existence de l'intégrale] donc $\underline{\lambda = \dfrac{\ln 2}{2}}$.

7. Un équivalent du réel a_n à l'infini :

a. On a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-6v_n+v_{n-1} &= (n+1)^\alpha a_{n+1}-6v_n+v_{n-1}\\
&= (n+1)^\alpha\left[\frac{3(2n+1)}{n+1}\,a_n-\frac{n}{n+1}\,a_{n-1}\right]-6v_n+v_{n-1}\\
&= \left[\frac{3(2n+1)}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha-6\right]v_n+\left[1-\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^\alpha\right]v_{n-1}\\
&= 6\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}-1\right]v_n+\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right]v_{n-1}\\
&= 6\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{\alpha-1}{n}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2n^2}+o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\right)-1\right]v_n\\
&\quad+\left[1-\left(1+\frac{\alpha-1}{n}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2n^2}+o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2}+o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\right)\right]v_{n-1}\\
&= 6\left[\frac{2\alpha-1}{2n}+\frac{(\alpha-1)^2}{2n^2}+o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\right]v_n+\left[\frac{2\alpha-1}{n}+\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{n^2}+o\big(\tfrac{1}{n^2}\big)\right]v_{n-1}
\end{aligned}$$

donc pour $\alpha=\frac{1}{2}$, $\quad v_{n+1}-6v_n+v_{n-1}=\frac{1}{n^2}\big(A_n\,v_n+B_n\,v_{n-1}\big)$ avec $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}$, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

b. L'équation caractéristique de cette récurrence est $r^2-6r+1=0$ dont les racines sont $3+\sqrt{8}$ et $3-\sqrt{8}$ donc il existe $(K,K')\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=K\big(3+\sqrt{8}\big)^n+K'\big(3-\sqrt{8}\big)^n$. En particulier, $K+K'=0$ et $K\big(3+\sqrt{8}\big)+K'\big(3-\sqrt{8}\big)=3$ ce qui donne $\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=\frac{3}{2\sqrt{8}}\left[\big(3+\sqrt{8}\big)^n-\big(3-\sqrt{8}\big)^n\right]$.

c. $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2\sqrt{8}}\big(3+\sqrt{8}\big)^n$ et $a_n=\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2\sqrt{8}\,\sqrt{n}}\big(3+\sqrt{8}\big)^n$.

8. Le réel $\ln 2$ n'est pas rationnel :

a. D'après (**7.c**), $\frac{a_n\sqrt{n}}{e^{nu}}=\frac{a_n\sqrt{n}}{\big(3+\sqrt{8}\big)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2\sqrt{8}}=K_1>0$ donc $\exists\,N_1,\ \forall n\geqslant N_1,\quad \frac{1}{2}K_1\leqslant\frac{a_n\sqrt{n}}{e^{nu}}\leqslant 2\,K_1$.
Donc $\exists\,N_1,\ \forall n\geqslant N_1,\quad \frac{1}{2}K_1\,\frac{e^{nu}}{\sqrt{n}}\leqslant a_n\leqslant 2\,K_1\,\frac{e^{nu}}{\sqrt{n}}$.

b. Erreur d'énoncé : La question à utiliser est (**5.b**) et pas (**5.d**).

D'après (**5.b**) et (**8.a**), on a, pour tout $n\geqslant N_1$,

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{a_n}\leqslant\frac{C}{a_{n+1}a_n}\leqslant\frac{C}{\frac{1}{2}K_1\,\frac{e^{(n+1)u}}{\sqrt{n+1}}\,\frac{1}{2}K_1\,\frac{e^{nu}}{\sqrt{n}}}=\frac{4C}{K_1^2e^u}\sqrt{n(n+1)}\,e^{-2nu}\leqslant\frac{4C}{K_1^2e^u}\,(n+1)\,e^{(a-2)nu}\,e^{-anu}$$

et $(n+1)\,e^{(a-2)nu} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $(a-2)u>0$ donc la suite $\big((n+1)\,e^{(a-2)nu}\big)_{n\geqslant N_1}$ est bornée et donc $\exists\,M,\ \forall n\geqslant N_1,\quad (n+1)\,e^{(a-2)nu}\leqslant M$. On a donc $\forall n\geqslant N_1,\ 0\leqslant\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{a_n}\leqslant\frac{4CM}{K_1^2e^u}\,e^{-anu}$ et ce majorant est le terme général d'une série géométrique convergente car $au>0$. En sommant, on obtient :

$$\forall n\geqslant N_1,\ 0\leqslant\lambda-\frac{b_n}{a_n}=\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}-\frac{b_k}{a_k}\right)\leqslant\frac{4CM}{K_1^2e^u}\,\frac{e^{-anu}}{1-e^{-au}}$$

donc, en posant $K_2=\frac{4CM}{K_1^2e^u}\,\frac{1}{1-e^{-au}}$, $\exists\,K_2,\ \forall n\geqslant N_1,\quad 0\leqslant\lambda-\frac{b_n}{a_n}\leqslant K_2\,e^{-anu}$.

c. $d_n = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leqslant n}} p^{\omega(p)}$ avec $\omega(p) = \max\{k \geqslant 0 \mid p^k \leqslant n\}$. En particulier, $p^{\omega(p)} \leqslant n$ et donc $d_n \leqslant n^{N(n)} = e^{N(n)\,\ln n}$. Or $\dfrac{N(n)\,\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\exists\, N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ \dfrac{N(n)\,\ln n}{n} \leqslant 1,1$ soit $N(n)\,\ln n \leqslant 1,1\,n$ donc $\underline{\exists\, N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2, \quad d_n \leqslant e^{1,1\,n}}$.

d. Erreur d'énoncé : Les entiers p_n et q_n ne sont pas premiers entre eux : $p_4 \wedge q_4 \neq 1$.

On a déjà $0 \leqslant \lambda - \frac{b_n}{a_n} = \lambda - \frac{p_n}{q_n}$ et, d'autre part, pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ et $r > 0$,

$$\frac{1}{q_n^{r+1}} = \frac{1}{a_n^{r+1} d_n^{r+1}} \geqslant \frac{1}{\left(2\,K_1\,\dfrac{e^{nu}}{\sqrt{n}}\right)^{r+1}} \frac{1}{\left(e^{1,1\,n}\right)^{r+1}} = \frac{1}{(2\,K_1)^{r+1}}\, n^{\frac{r+1}{2}}\, e^{-(r+1)(1,1+u)\,n} \quad .$$

Or, d'aprés le résultat fourni, $1,1 + u < \dfrac{u}{0,61}$ donc $e^{-(r+1)(1,1+u)\,n} \geqslant e^{-\frac{r+1}{0,61}\,un}$. Choisissons $r < 0,22$ de façon à avoir $\dfrac{r+1}{0,61} < 2$ et prenons $a = \dfrac{r+1}{0,61}$. On a :

$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \quad \frac{1}{q_n^{r+1}} \geqslant \frac{1}{(2\,K_1)^{r+1}}\, e^{-anu}$$

et, de plus, $\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \quad \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leqslant K_2\, e^{-anu}$ d'après (**b**). Donc

$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \quad 0 \leqslant \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leqslant K_2\,(2\,K_1)^{r+1}\, \frac{1}{q_n^{r+1}} \quad .$$

Ainsi, $\underline{\exists\, r > 0,\ \exists\, K_3 \in \mathbb{R},\ \exists\, N_3 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_3, \quad 0 \leqslant \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{K_3}{q_n^{r+1}}}$.

e. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{p}{q}$, alors $\left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\dfrac{pq_n - p_n q}{qq_n}\right| = \dfrac{|pq_n - p_n q|}{|q| q_n} \geqslant \dfrac{1}{|q| q_n}$ car $|pq_n - p_n q| \in \mathbb{N}$ et si on avait $|pq_n - p_n q| = 0$ alors $\lambda - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{b_k}{a_k}\right) = 0$ ce qui est faux car, pour tout k, $\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{b_k}{a_k} > 0$ d'après (**5.b**). Donc $\underline{\exists\, L > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \geqslant \frac{L}{q_n}}$.

f. Si $\ln 2$ est rationnel alors $\lambda = \dfrac{\ln 2}{2}$ aussi et donc on a, en utilisant les résultats du (**d**) et du (**e**),

$$\forall n \geqslant N_3, \quad \frac{K_3}{q_n^{r+1}} \geqslant \frac{L}{q_n} \quad .$$

Donc $\forall n \geqslant N_3$, $\dfrac{K_3}{l} \geqslant q_n^r \geqslant a_n^r \geqslant (n+1)^r$ ce qui est absurde car $(n+1)^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\underline{\ln 2 \text{ est irrationnel}}$.

* * *
* *
*