

Une proposition du corrigée du concours X- ENS – (PSI) 2016

Par Mohammed Icheha

Préliminaire

1)a) Notons ${}^t x = (x_1 \quad x_n)$; ${}^t y = (y_1 \quad y_n)$; $S = \text{diag}(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$; $R = \text{diag}(\varepsilon'_1; \dots; \varepsilon'_n)$

On a : $(x|y) - (Sx|Ry) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon'_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i \varepsilon'_i) x_i y_i$

Or $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $1 \geq \varepsilon_i \varepsilon'_i$, $x_i > 0$ et $y_i > 0$, donc $(1 - \varepsilon_i \varepsilon'_i) x_i y_i \geq 0$ et alors $(Sx|Ry) \leq (x|y)$ et

$(Sx|Ry) = (x|y) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i \varepsilon'_i) x_i y_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1; \dots; n\}; (1 - \varepsilon_i \varepsilon'_i) x_i y_i = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in \{1; \dots; n\}; \varepsilon_i \varepsilon'_i = 1 \Leftrightarrow [\forall i \in \{1; \dots; n\}; (\varepsilon_i = \varepsilon'_i = 1 \text{ ou } \varepsilon_i = \varepsilon'_i = -1)] \Leftrightarrow S = R.$

b) Supposons qu'il existe $x; y \in \mathbb{R}^n$; strictement positifs et deux matrices diagonales de signes

$S; R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $Ox = Sx$ et $Oy = Ry$; alors $(Sx|Ry) = (Ox|Oy) = {}^t x \ O \ O \ y = {}^t x \ y = (x|y).$

Ainsi d'après a) $S = R$, d'où l'unicité de S .

Remarque : si T est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x; y \in \mathbb{R}^n$; on a :

$(Tx|Ty) = {}^t x \ T \ T \ y = {}^t x \ y = (x|y)$, en particulier ; $\|Tx\| = \|x\|$

c) On a $\|Sx + Ry\|^2 = \|Sx\|^2 + \|Ry\|^2 + 2(Sx|Ry) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(Sx|Ry)$; (R et S sont orthogonales). Ainsi : $\|Sx + Ry\|^2 - \|x + y\|^2 = 2((Sx|Ry) - (x|y))$

On en déduit, en tenant compte de 1)a) que $\|Sx + Ry\| \leq \|x + y\|$ et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $(Sx|Ry) = (x|y)$ si et seulement si $S = R$.

2) \Rightarrow supposons qu'il existe une matrice diagonale de signes $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $Ox = Sx$. En posant ${}^t x = (x_1 \quad x_n)$ et $S = \text{diag}(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ alors, pour $\varepsilon \in \{-1; 1\}$; on a :

$(I_n + \varepsilon O)x = x + \varepsilon Ox = x + \varepsilon Sx = ((1 + \varepsilon \varepsilon_1)x_1 \dots \dots \dots (1 + \varepsilon \varepsilon_n)x_n).$

Or pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $1 + \varepsilon \varepsilon_i \geq 0$ et $x_i > 0$ ainsi, $(I_n + \varepsilon O)x \geq 0$.

\Leftrightarrow supposons que $\begin{cases} (I_n + O)x \geq 0 \\ (I_n - O)x \geq 0 \end{cases}$ (*)

Notons ${}^t x = (x_1 \quad x_n)$ et ${}^t (Ox) = (y_1 \quad y_n)$. D'après (*) ; $\forall i \in \{1; \dots; n\} : \begin{cases} x_i + y_i \geq 0 \\ x_i - y_i \geq 0 \end{cases}$

donc $\forall i \in \{1; \dots; n\} : (x_i + y_i)(x_i - y_i) \geq 0$ ou encore : $x_i^2 - y_i^2 \geq 0$. D'autre part :

$\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = \|x\|^2 - \|Ox\|^2 \stackrel{(\text{O orthogonale})}{=} 0$; Ainsi

$\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = 0$. Comme les termes de cette somme sont positifs ; alors ;

$\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $x_i^2 - y_i^2 = 0$ donc $\forall i \in \{1; \dots; n\}; \exists \varepsilon_i \in \{-1; 1\} : y_i = \varepsilon_i x_i$; Ainsi, $Ox =$

${}^t (y_1 \dots \dots \dots y_n) = {}^t (\varepsilon_1 x_1 \dots \dots \dots \varepsilon_n x_n) = Sx$ avec $S = \text{diag}(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ qui est une matrice diagonale de signes.

Parie- A

3) Si $\vec{v}_+ \in \text{Vect}(\vec{i})$; on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ et $O \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \text{diag}(1; -1)$

Si $\vec{v}_+ \in \text{Vect}(\vec{j})$; on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ et $O \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \text{diag}(-1; 1)$

Si $\vec{v}_+ \notin \text{Vect}(\vec{i}; \vec{j})$. Notons $\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On a $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et donc $|a| > 0$ et $|b| > 0$.

Si a et b sont de même signe ; on a $\begin{pmatrix} |a| \\ |b| \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $O \begin{pmatrix} |a| \\ |b| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a| \\ |b| \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} |a| \\ |b| \end{pmatrix}$ avec $S = I_2$

Si a et b sont de signes contraires ; alors le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} |b| \\ |a| \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{v}_+ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, (car si

$\varepsilon_a = \text{signe}(a)$; on a $(\vec{v}_+ | \vec{v}) = a|b| + b|a| = \varepsilon_a |a||b| - \varepsilon_a |b||a| = 0$) et on a alors : $O \begin{pmatrix} |b| \\ |a| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|b| \\ -|a| \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} |b| \\ |a| \end{pmatrix}$ avec $S = -I_2$.

4) En faisant une figure ; on voit que :

Si $\theta \in]0; \pi[$; on a : $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, alors le vecteur $x_- = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ est strictement positif et on a

$$Ox_- = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = Sx_- \text{ où } S = \text{diag}(-1; 1).$$

Si $\theta \in]-\pi; 0[$; on a : $-\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, alors le vecteur $x_+ = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) \\ \sin(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ est strictement positif et on a

$$Ox_+ = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2} + \theta) \\ \sin(-\frac{\theta}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = Sx_+ \text{ où } S = \text{diag}(1; -1).$$

Si $\theta = \pi$; on a $O = -I_2$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ et $O \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $S = -I_2$

Parie- B

5) La matrice M est antisymétrique à coefficients réels donc d'après le théorème de Tucker, il existe un vecteur positif u de \mathbb{R}^{3n} et donc trois vecteurs positifs $x; z_1; z_2$ de \mathbb{R}^n tels que ${}^t u = {}^t(x \ z_1 \ z_2)$; $Mu \geq 0$ et $u + Mu > 0$. En effectuant les calculs par blocs et en traduisant ces deux inégalités, on trouve les relations demandées.

6) ■ si $v \in \mathbb{R}^n$, notons par $(v)_i$ les composantes de v dans la base canonique .

D'après la question précédente ; on a : $-(I_n + {}^t O)z_1 - (I_n - {}^t O)z_2 \geq 0$, donc pour tout $i \in$

$\{1; \dots; n\}$, $(-{}^t O(z_1 - z_2))_i \geq (z_1 + z_2)_i \geq 0$; alors $\| -{}^t O(z_1 - z_2) \| \geq \|z_1 + z_2\|$ ou encore, puisque O est orthogonale, $\|z_1 - z_2\| \geq \|z_1 + z_2\|$. D'autre part ; $\|z_1 + z_2\|^2 - \|z_1 - z_2\|^2 = 4(z_1 | z_2)$ qui est positif car z_1 et z_2 sont positifs ; alors $\|z_1 + z_2\| \geq \|z_1 - z_2\|$. On a donc $\|z_1 + z_2\| = \|z_1 - z_2\|$.

■ Posons $t = -(I_n + {}^t O)z_1 - (I_n - {}^t O)z_2$; on a :

$$\|t\|^2 = \left\| -(z_1 + z_2) - {}^t O(z_1 - z_2) \right\|^2 = \|z_1 + z_2\|^2 + \left\| {}^t O(z_1 - z_2) \right\|^2 + 2 \left(z_1 + z_2 \mid {}^t O(z_1 - z_2) \right)$$

Or $\left\| {}^t O(z_1 - z_2) \right\| = \|z_1 - z_2\| = \|z_1 + z_2\|$; on a donc :

$$\|t\|^2 = -2 \underbrace{\left(z_1 + z_2 \mid -(z_1 + z_2) - {}^t O(z_1 - z_2) \right)}_{\geq 0} \leq 0. \text{ Alors } \|t\|^2 \leq 0; \text{ d'où } t = 0.$$

7) D'après 5) ; il existe $x; y; z \in \mathbb{R}^n$, positifs tels que :
$$\begin{cases} (I_n + O)x \geq 0 \\ (I_n - O)x \geq 0 \\ x - (I_n + {}^t O)z_1 - (I_n - {}^t O)z_2 > 0 \quad (*) \end{cases}$$

et on vient de voir que $-(I_n + {}^t O)z_1 - (I_n - {}^t O)z_2 = 0$, donc $(*) \Rightarrow x > 0$ alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$

strictement positif tel que $\begin{cases} (I_n + O)x \geq 0 \\ (I_n - O)x \geq 0 \end{cases}$ ce qui démontre, d'après 2) ; le théorème de Broyden.

8) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + M)x = 0$ alors $Mx = -x$; ainsi $-{}^t x x = (Mx)x = {}^t x Mx = {}^t x (-M)x = -{}^t x (Mx) = -{}^t x (-x) = {}^t x x$, donc $2{}^t x x = 0$ et alors $x = 0$ et donc $I_n + M$ est donc inversible.

9) On a $O = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ donc ${}^t O = {}^t (I_n - M) (I_n + M)^{-1} = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}$
(car $M = -M$). Alors :

$O {}^t O = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)(I_n - M)^{-1} = (I_n + M)^{-1}(I_n + M)(I_n - M)(I_n - M)^{-1} = I_n$;
(Car I_n et M commutent). Ainsi O est une matrice orthogonale.

10) On a O est orthogonale donc, d'après le théorème de Broyden ; il existe $x \in \mathbb{R}^n$; strictement positif et une matrice diagonale de signes $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $Ox = Sx$; donc tels que

$(I_n + M)^{-1}(I_n - M)x = Sx$ et on a alors $(I_n - M)x = (I_n + M)Sx$ et donc $M(x + Sx) = x - Sx$ (*).

Or d'après 2), $\begin{cases} (I_n + O)x \geq 0 \\ (I_n - O)x \geq 0 \end{cases}$ on a donc $\begin{cases} x + Sx \geq 0 \quad (1) \\ x - Sx \geq 0 \quad (2) \end{cases}$; (*) et (2) $\Rightarrow M(x + Sx) \geq 0$; de plus

(*) $\Rightarrow x + Sx + M(x + Sx) = 2x$ qui montre que $x + Sx + M(x + Sx) > 0$, puisque $x > 0$. On conclut que le vecteur $u = x + Sx$ répond au théorème de Tucker.

Parie- C

11) O étant une matrice orthogonale ; donc ses vecteurs colonnes et vecteurs lignes forment des familles ortho normales pour le produit scalaire canonique ; en particulier ; on a :

$$\alpha^2 + \|r\|^2 = 1 = \alpha^2 + \|q\|^2, \text{ ainsi } |\alpha| \leq 1.$$

$$|\alpha| = 1 \Leftrightarrow \|r\|^2 = 0 = \|q\|^2 \Leftrightarrow r = 0 = q$$

12) On suppose que $|\alpha| = 1$; donc $O = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et alors P est une matrice orthogonale de

$\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse de récurrence ; il existe $x > 0$ de \mathbb{R}^{n-1} et une matrice diagonale de

signes S de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que $Px = Sx$. On a alors $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ et $O \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px \\ \alpha \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} Sx \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = S' \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ où $S' = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale de signes; ainsi le théorème de Broyden est vérifié dans ce cas.

13) On suppose $|\alpha| < 1$.

O étant une matrice orthogonale donc ${}^t O O = \begin{pmatrix} {}^t P & q \\ r & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & r \\ {}^t q & \alpha \end{pmatrix} = I_n$. En effectuant le produit par

blocs ; l'égalité des matrices donne :

$${}^t P P + q {}^t q = I_{n-1} \quad (1) ; \quad {}^t P r + \alpha q = 0 \quad (2) ; \quad {}^t r r + \alpha^2 = 1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{14)} \text{ on a } Q_+ Q_+ &= \begin{pmatrix} P & r \\ -\frac{r}{\alpha+1} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & r \\ -\frac{r}{\alpha+1} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -\frac{q}{\alpha+1} \\ -\frac{q}{\alpha+1} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & r \\ -\frac{r}{\alpha+1} & P \end{pmatrix} = P P - \frac{P r}{\alpha+1} - \frac{q r P}{\alpha+1} + \frac{q r r}{(\alpha+1)^2} \\
 &\stackrel{\text{(d'après (2)et(3))}}{=} P P - \frac{(-\alpha q) q}{\alpha+1} - \frac{q(-\alpha q)}{\alpha+1} + \frac{q(1-\alpha^2) q}{(\alpha+1)^2} = P P + q q \stackrel{\text{(d'après (1))}}{=} I_{n-1}
 \end{aligned}$$

Ainsi Q_+ est une matrice orthogonale. Un calcul similaire montre que Q_- est aussi une matrice orthogonale.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{15)} \text{ on a : } Q_+ Q_- &= \begin{pmatrix} P & -\frac{q}{\alpha+1} \\ -\frac{q}{\alpha+1} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & -\frac{r}{\alpha-1} \\ -\frac{r}{\alpha-1} & P \end{pmatrix} = P P - \frac{P r}{\alpha-1} - \frac{q r P}{\alpha+1} + \frac{q r r}{\alpha^2-1} \\
 &\stackrel{\text{(d'après (1);(2)et(3))}}{=} I_{n-1} - q q - \frac{(-\alpha q) q}{\alpha-1} - \frac{q(-\alpha q)}{\alpha+1} + \frac{q(1-\alpha^2) q}{\alpha^2-1} = I_{n-1} - \frac{2}{1-\alpha^2} q q
 \end{aligned}$$

En multipliant à gauche cette relation par la matrice orthogonale Q_+ ; on trouve que

$$Q_- = Q_+ - \frac{2}{1-\alpha^2} Q_+ q q.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{16)} \text{ On a : } (S_+ x_+ | S_- x_-) &= (Q_+ x_+ | Q_- x_-) = (x_+ | Q_+ Q_- x_-) \stackrel{\text{(d'après 15))}}{=} (x_+ | (I_{n-1} - \frac{2}{1-\alpha^2} q q) x_-) \\
 &= (x_+ | x_-) - \frac{2}{1-\alpha^2} (x_+ | q q x_-) = (x_+ | x_-) - \frac{2}{1-\alpha^2} q x_- (x_+ | q) \\
 &= (x_+ | x_-) - \frac{2}{1-\alpha^2} (x_- | q) (x_+ | q)
 \end{aligned}$$

17) l'hypothèse $S_+ \neq S_-$ équivaut d'après 1)a), à : $(S_+ x_+ | S_- x_-) - (x_+ | x_-) < 0$; qui équivaut, d'après 16) à : $-\frac{2}{1-\alpha^2} (x_- | q) (x_+ | q) < 0$ ou encore à : $2 \eta_+ \eta_- < 0$ (*).

■ Si $\eta_+ > 0$; on a $z_+ = \begin{pmatrix} x_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix} > 0$, et :

$$\begin{aligned}
 Oz_+ &= \begin{pmatrix} P & r \\ q & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P x_+ + r \eta_+ \\ q x_+ + \alpha \eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P x_+ + r(-\frac{(x_+ | q)}{\alpha+1}) \\ q x_+ + \alpha(-\frac{(x_+ | q)}{\alpha+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P x_+ + r(-\frac{q x_+}{\alpha+1}) \\ q x_+ + \alpha(-\frac{q x_+}{\alpha+1}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (P - \frac{r q}{\alpha+1}) x_+ \\ \frac{q x_+}{\alpha+1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{(d'après déf de } Q_+ \text{ et } \eta_+)}{=} \begin{pmatrix} Q_+ x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} \stackrel{\text{(d'après 15))}}{=} \begin{pmatrix} S_+ x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Le calcul de Oz_+ fait apparaître la matrice $\begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et non pas $\begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme c'est dit dans l'énoncé, ce qui laisse penser qu'il y a peut être une erreur dans l'énoncé si on admet que l'expression de z_+ est correcte. Avec $S^+ = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; on a $Oz_+ = S^+ z_+$. Ainsi le couple $(z_+; S^+)$ convient.

■ Si $\eta_+ < 0$; puisque d'après (*), $2 \eta_+ \eta_- < 0$, alors $\eta_- > 0$. En **considérant** $z_- = \begin{pmatrix} x_- \\ \eta_- \end{pmatrix} > 0$ et $S^- = \begin{pmatrix} S_- & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$ (et non pas $S^- = \begin{pmatrix} S_- & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ comme le dit l'énoncé). On vérifie comme ci-dessus que $Oz_- = S^- z_-$; ainsi le couple $(z_-; S^-)$ convient.

18) Traitons maintenant le cas où $S_+ = S_-$. On remarque que cette hypothèse est équivalente à : $(x_- | q) (x_+ | q) = 0$ ou encore à $\eta_+ \eta_- = 0$.

♦ Cas où $\underbrace{(x_+|q)}_{\eta_+} = 0 = {}^t q x_+$.

$$\text{a) On a : } Oz = \begin{pmatrix} P & r \\ {}^t q & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P x_+ \\ {}^t q x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Q_+ + \frac{{}^t r q}{\alpha+1}) x_+ \\ (x_+|q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_+ x_+ + \frac{{}^t r (q x_+)}{\alpha+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_+ x_+ \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S_+ x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \varepsilon = -1 \text{ ou } \varepsilon = 1.$$

Ainsi : $Oz = R^+ z = R^- z$

♦NB : On a un résultat analogue si on suppose que $\underbrace{(x_-|q)}_{\eta_-} = 0 = {}^t q x_-$

b) O étant une matrice orthogonale donc ${}^t O O = \begin{pmatrix} \alpha' & {}^t r' \\ q' & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & {}^t q' \\ r' & p' \end{pmatrix} = I_n$. En effectuant le produit par blocs ; cette égalité se traduit par :

$$\alpha'^2 + {}^t r' r' = 1 \quad ; \quad \alpha' {}^t q' + {}^t r' p' = 0 \quad ; \quad \alpha' q' + p' r' = 0 \quad ; \quad q' {}^t q' + p' p' = I_{n-1}$$

Ces relations permettent de dire que $O' = \begin{pmatrix} p' & r' \\ {}^t q' & \alpha' \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale et les résultats

des questions 12) ; 17) et 18) a) démontrés pour une matrice orthogonale permettent d'affirmer qu'il existe un vecteur $x' > 0$ de \mathbb{R}^{n-1} et un réel $\eta' \geq 0$ et une matrice diagonale de signes T de

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tels que } O' \begin{pmatrix} x' \\ \eta' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ \eta' \end{pmatrix} \text{ ou encore tels que } \begin{pmatrix} p' & r' \\ {}^t q' & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \eta' \end{pmatrix} \text{ où}$$

$T_1 = \text{diag}(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_{n-1})$. Cette relation est équivalente à $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha' & {}^t q' \\ r' & p' \end{pmatrix}}_O \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix}$. Ainsi, en

posant $z' = \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix}$ et $R' = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$; on a $Oz' = R'z'$ et R' est une matrice diagonale de signes.

c) ■ Si $\eta' > 0$; alors le couple $(z'; R')$ convient

■ Si $\eta' = 0$; On a $z' = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}$ et $Oz' = R'z'$. En notant R' une quelconque des matrices R^+ ou R^- définie à la question 18)a) ; on a : $\|Rz + R'z'\| = \|Oz + Oz'\| = \|O(z + z')\| = \|z + z'\|$ (*).

Si $n \geq 3$; Notons : $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$; $z' = \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$; $R = \text{diag}(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ et $R' = \text{diag}(\varepsilon'_1; \dots; \varepsilon'_n)$

$$\text{On a : } z + z' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x'_{n-1} \\ x'_n \end{pmatrix} > 0 \text{ et } Rz + R'z' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon'_2 x'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} x_{n-1} + \varepsilon'_{n-1} x'_{n-1} \\ \varepsilon'_n x'_n \end{pmatrix}$$

L'égalité (*) $\|Rz + R'z'\| = \|z + z'\|$, obtenue ci-dessus est équivalente à :

$$(\varepsilon_1 x_1)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (\varepsilon_i x_i + \varepsilon'_i x'_i)^2 + (\varepsilon'_n x'_n)^2 = (x_1)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (x_i + x'_i)^2 + (x'_n)^2 \text{ ou encore à :}$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} (\varepsilon_i x_i + \varepsilon'_i x'_i)^2 = \sum_{i=2}^{n-1} (x_i + x'_i)^2 \quad (**); \text{ (Les sommes mises en jeu ont un sens car } n \geq 3).$$

Notons $z_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$; $z'_1 = \begin{pmatrix} x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix}$; $R_1 = \text{diag}(\varepsilon_2; \dots; \varepsilon_{n-1})$ et $R'_1 = \text{diag}(\varepsilon'_2; \dots; \varepsilon'_{n-1})$.

La relation (**) s'écrit : $\|R_1 z_1 + R'_1 z'_1\| = \|z_1 + z'_1\|$ et comme $z_1 > 0$; $z'_1 > 0$; alors d'après 1)a), $R_1 = R'_1$ et donc pour tout $i \in \{2; \dots; n-1\}$; $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$.

Posons $S = \text{diag} \left(\varepsilon_1; \underbrace{\varepsilon_2 \dots \dots \dots \varepsilon_{n-1}}_{\text{termes communs à R et R}'}; \varepsilon'_n \right)$, (le dernier élément ε'_n étant le dernier élément de R'). on a alors :

$$\begin{aligned}
 S(z + z') &= S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x'_{n-1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_2 x'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} x_{n-1} + \varepsilon_{n-1} x'_{n-1} \\ \varepsilon'_n x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \varepsilon_2 x_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 x'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} x'_{n-1} \\ \varepsilon'_n x'_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \varepsilon_2 x_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon'_2 x'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_{n-1} x'_{n-1} \\ \varepsilon'_n x'_n \end{pmatrix} = Rz + R'z' = Oz + Oz' = O(z + z')
 \end{aligned}$$

Si $n = 2$, on a $z + z' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $S = \text{diag}(\varepsilon_1; \varepsilon'_2)$ conviennent.

On conclut que le résultat est vraie pour $n + 1$; ce qui achève la démonstration du théorème de Broyden.

Parie- D

19) En effectuant un calcul par bloc ; les relations $By \geq 0$ et $y + By > 0$ se traduisent par :

$$\begin{cases} Ax - bt \geq 0 & (1) \\ -Ax + bt \geq 0 & (2) \\ -A z_1 + A z_2 \geq 0 & (3) \\ b z_1 - b z_2 \geq 0 & (4) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_1 + Ax - bt > 0 & (1)' \\ z_2 - Ax + bt > 0 & (2)' \\ x - A z_1 + A z_2 > 0 & (3)' \\ t + b z_1 - b z_2 > 0 & (4)' \end{cases}$$

Si $t = 0$; D'après (3) ; on a : $-A z \geq 0$ (où $z = z_1 - z_2$) et d'après (4)' ; on a : $b z > 0$. Dans ce cas, on a la propriété (II) du lemme de Farkas .

20) De (1) et (2) ; on déduit que $Ax - bt = 0$ (car les composantes du vecteur $Ax - bt$ sont à la fois positifs et négatifs) donc $Ax = bt$ et si $t > 0$; on aura $A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = b$. Posons $x' = \frac{x}{t}$; on a $x' \geq 0$ et $Ax' = b$. Dans ce cas, on a la propriété (I) du lemme de Farkas .

Supposons maintenant que (I) et (II) sont simultanément vérifiées ; alors, il existe x positif de \mathbb{R}^m et z de \mathbb{R}^n tels que $(Ax = b)$ et $(-A z \geq 0 \text{ et } b z > 0)$; la dernière inégalité s'écrit $(Ax)z > 0$ ou encore $x^t A z > 0$ (*). Or $(x \geq 0 \text{ et } -A z \geq 0)$ donc $x^t (-A z) \geq 0$ et alors, $x^t A z \leq 0$, ce qui est contradictoire avec (*).

Les résultats des questions 19) et 20) montrent qu'exactly une des propriétés du lemme de Farkas est vérifiée.

